

COSMOGRAPHIÆ

PHYSICÆ, ET MATHEMATICÆ

PARS ALTERA.

COSMOGRAPHIÆ
PHYSICÆ, ET MATHEMATICÆ
PARS ALTERA
DE ROTATIONIS MOTU
ET PHÆNOMENIS
INDE PENDENTIBUS.



Nil parvum ſapias, & adhuc ſublimia cures:
Quæ mare compeſcant cauſſæ: quid temperet annum:
Stellæ ſponte ſua, juſſæne vagentur, & errent:
Quid premat obſcurum Lunæ, quid proferat orbem:
Quid velit, & poſſit rerum concordia diſcors.

Horat. Epiſt. XII.



MEDIOLANI):(M.DCC.LXXV.

Ex Typographia Josephi Marelli.
Superiorum permiſſu.



IGNATIO RADICATO COMITI COCONATI
JULIO MOZZIO EQUITI HET. ORD.
AUGUSTO DE KERAILLÔ EQUITI ORD. D. LUD.
PETRO DU SÉJOUR IN SUP. PAR. CUR. SENATORI
CAROLO WALMESLEY ANGLO R. E.
DANIELI MELANDER SUECO A. P.
MATHEMATICIS PRÆSTANTISSIMIS
DIUTIUS SIBI AMICITIA
ET LITTERARIO COMMERCIO JUNCTIS
PAULLUS FRISIUS
HANC ALTERAM COSMOGRAPHIÆ PARTEM
IN AMICITIÆ, ET COMMERCII DULCISSIMI
MEMORIAM SEMPITERNAM.

INDEX TOTIUS OPERIS.

INTRODUCTIO, *qua priores formulæ motus corporum directe sibi invicem occurrentium, aut circa datum axem oscillantium breviter præmittuntur.* pag. 1.
LIBER PRIMUS. *De theoria motuum rotationis.* 17.
LEMMA *pro æquatione corporum ab uno ad aliud planum traducenda.* 21.
CAP. I. *De compositione, resolutione motuum rotationis.* 24.
CAP. II. *De motuum omnium generatione.*
SCHOLION. *De conservatione ejusdem semper momenti rotationis.* 43.
CAP. III. *De rotationis axe, & velocitate corporum regularium.* 45.
CAP. IV. *De motu, & rotatione corporum quorumcumque.* 72.
LIBER SECUNDUS. *De Figura Planetarum.* 83.
CAP. I. *De dimensione graduum, & quæ inde colligitur Figura Terræ.* 92.
CAP. II. *De æquilibrio particularum omnium se se trahentium.* 104.
CAP. III. *De sphærarum, sphæroidumque attractione.* 114.
CAP. IV. *De Planetarum Figura, quæ ex æquilibrii legibus colligitur.* 123.
SCHOLION I. *De rotatione, figura, & libratione Lunæ.* 134.
SCHOLION II. *De experimentis pendulorum eodem tempore diversis in locis oscillantium.* 137.
SCHOLION III. *De variatione gravitatis in vertice, atque ad pedes montium.* 140.
LIBER TERTIUS. *De Theoria diurni motus.* 143.
CAP. I. *De axe diurnæ rotationis.* 153.
CAP. II. *De præcessione æquinoctiorum.* 162.
SCHOLION. *De aliis problematis solutionibus, & de motu nodorum annuli æquatori Terræ circumpositi.* 171.
CAP.

CAP. III. *De præceſſionis mediæ æquatione.* 173.
CAP. IV. *De nutatione terreſtris axis.* 180.
LIBER QUARTUS. *De altitudine, & motu marium.* 190.
CAP. I. *De generalibus variationibus marium, & totius Terræ.* 196.
SCHOLION. *De cauſſa phyſica altitudinis in toto mari Mediterraneo auctæ, & in mari Baltico imminutæ.* 205.
CAP. II. *De æquilibrio fluidorum nucleos ſphæroidicos circumambientium.* 207.
CAP. III. *De fluxu, & refluxu maris.* 219.
LIBER QUINTUS. *De Atmoſphæra Planetarum.* 231.
CAP. I. *De preſſione, & denſitate Atmoſphæræ.* 235.
SCHOLION I. *De paradoxis, & problematis Barometricis.* 245.
SCHOLION II. *De regulis ſupputandi altitudines montium ex differentia altitudinum Barometricarum.* 248.
SCHOLION III. *De Geometrica methodo ſalubritatis aeris in Prieſtleyanis experimentis per gradus ſingulos æſtimandæ.* 249.
CAP. II. *De figura, & limitibus Atmoſphæræ.* 252.
SCHOLION I. *De variatione altitudinis Barometricæ, quæ ex Solis, ac Lunæ viribus oriri poteſt.* 257.
SCHOLION II. *De generali ventorum cauſſa.* 259.
CAP. III. *De lege motuum Atmoſphæræ.* 261.
SCHOLION. *De Theoria, & de formulis propagationis ſoni.* 264.
APPENDIX *ad Theoriam Lunæ.* 272.

IN-

INTRODUCTIO.

I. Eges conflictus, & percussionis corporum directe sibi occurrentium, a Cartesio infeliciter exploratas, in Transactionibus Londinensibus anni 1669 primi omnium tradiderunt Wallisius, Wrennus, & Hugenius. Wallisius ab eo principio exorsus est, quod si vis aliqua imprimatur cuicumque corpori, velocitatem eo minorem gignet, quo major fuerit corporis ipsius massa. Idem principium expresse assumpsit Newtonus in Lege III. Lib. I. Princip. Mathem. cum statuit in ictu, & collisione corporum æquales motuum mutationes utrobique esse oportere, & mutationes velocitatum esse massis reciproce proportionales. Inde vero facile colligitur, quod si duo corpora sibi occurrant eadem motus directione, quæ motus quantitas deficiet uni corpori adjicietur alteri, & summa quantitatum motus ante, & post ictum manebit eadem. Quod si occursus fiat ex adversis partibus, æquales quantitates motus, quæ contrariæ erunt, destruentur, & differentia quantitatum absolutarum manebit eadem ante, & post ictum. Scilicet si massa unius corporis sit M, velocitas V, quantitas motus MV, & massa corporis alterius m, velocitas $\pm v$, quantitas motus $\pm mv$; in priori casu $MV + mv$, in casu altero $MV - mv$, atque universim quantitas $MV \pm mv$ non immutabitur ab ictu corporum inter se. Patet autem in occursu ipso duo corpora agere in se invicem, quousque una, & communis evadat utriusque velocitas post ictum. Erit ergo hæc communis velocitas $\frac{MV \pm mv}{M + m}$:

velocitas a corpore M amissa $V - \frac{(MV \pm mv)}{M + m} = \frac{mV \mp mv}{M + m}$:

velocitas a corpore m acquisita $\frac{MV \pm mv}{M + m} \mp v = \frac{MV \mp Mv}{M + m}$.

II. Inde vero hæc emergit constructio. Exeant duo corpora ex locis M, & m, fig. 1., & 2., atque occurrant sibi invicem in puncto O, ac propterea velocitates V, & v exprimantur re-

ctis MO, mO, eæque jaceant ad eamdem, aut ad contrarias partes cum puncto O, prout motus corporum ante ictum aut ad eamdem, aut ad contrarias partes dirigitur. Dividatur distantia omnis Mm in ratione reciproca massarum in puncto C, adeoque pondera M, m ad distantiam eamdem suspensa ex puncto C, juxta §. XVII. Introd. Par. I. in æquilibrio sint inter se, & sit C centrum gravitatis. Erit OC communis velocitas post ictum, eaque omnis evanescet cum punctum C in O cadet, quando nimirum contrariæ erunt occursus velocitates, & corporum massis reciproce proportionales. Erit etiam MC velocitas a corpore M amissa, & mC velocitas ictu acquisita ab altero corpore. Nam si communis fuerit ante ictum directio velocitatum V, & v, fiet

$$MV + mv = M.MO + m.mO = M.\overline{MC + OC} + m.\overline{OC - mC},$$

atque ob M.MC $= m.m$C erit $\frac{MV + mv}{M + m} = OC$:

& in casu altero motuum oppositorum erit similiter

$$\frac{M.\overline{MC + OC} - m.\overline{mC - OC}}{M + m} = OC.$$

III. Si utrique corpori adderetur communis quævis velocitas $MM' = mm'$, fig. 3., & 4., iisque in M', & m' positis sit centrum gravitatis C', ob $Mm = M'm'$, & $M'm'$, ut antea, divisam in ratione reciproca massarum, erit $MC = M'C'$, & $mC = m'C'$: scilicet velocitas ictu amissa, & acquisita erit eadem ac si ante ictum abfuisset velocitas communis. Quod idem ex prioribus formulis colligitur. Nam si velocitates ante ictum sint $\overline{A + V}$, & $\overline{A \pm v}$, erit communis velocitas post ictum

$$\frac{M.\overline{A + V} + m.\overline{A \pm v}}{M + m} = A + \frac{MV \pm mv}{M + m}:$$

& velocitas a priore corpore amissa adhuc erit $\frac{m.\overline{V \mp v}}{M + m}$:

& quæ alteri corpori ictu adjicietur $\frac{M.\overline{V \mp v}}{M + m}$.

Itaque communis motus relativum minime afficiet, & corporum dato spatio inclusorum iidem erunt motus inter se, sive spatium illud quiescat, sive moveatur uniformiter in directum. Cumque insuper communis velocitas post ictum OC', sive OC, fig.

fig. 1., & 2., eadem sit, qua centrum gravitatis duorum corporum M, & m primo moveri cœperat, motus autem hujusmodi ante ictum, ob uniformes velocitates MO, & mO, uniformis similiter esse debeat; patet pro occursu quolibet gravitatis centrum aut quiescere, aut moveri uniformiter in directum.

IV. Ita universim construi poterit problema si corpora directe impulsa, atque impellentia aut mollia, aut dura sint, & alterum alterius viribus penitus se accommodet. Si corpora sint elastica, eademque vi restituant se se, qua extrinsecus compressa sunt, corpus M duplam amittet portionem velocitatis, & corpus m duplam pariter acquiret, alteram ictu, alteram elasticitate, quæ æquali vi in contrarias partes corpus restituit. Scilicet si in fig. 5., & 6. accipiatur OC = CD, erit post ictum DM velocitas corporis M ex D in M, & mD velocitas corporis m ex D in m: quæ primum a Wrenno tradita constructio, & deinde a Desagulierio, Keillio, aliisque authoribus fusius exposita adeo elegans est ut hoc etiam in loco præteriri minime debeat. Ita scilicet erit $DM = 2OC - OM = OC - MC = OM - 2MC$, & $mD = 2OC - Om = Om + 2mC$, atque in utroque casu corporum elasticorum aut ad eamdem, aut ad oppositas plagas tendentium variationes velocitatum duplo majores erunt quam si aut omnino dura, aut incompressibilia, aut mollia fuissent corpora. Positis prioribus denominationibus erit

velocitas a corpore M ictu amissa $2m.\overline{V \mp v} : \overline{M + m}$

tota ipsius velocitas post ictum $\overline{MV - mV \pm 2mv} : \overline{M + m}$

velocitas a corpere m acquisita $2M.\overline{V \mp v} : \overline{M + m}$

tota velocitas post ictum $\overline{2MV \pm mv \mp Mv} . \overline{M + m}$

V. Si velocitas utriusque corporis per massam multiplicetur, erit in priore corpore quantitas motus post ictum $\overline{M^2V - MmV \pm 2Mmv} : \overline{M + m}$

atque in altero corpore $\overline{2MmV \pm m^2v \mp Mmv} : \overline{M + m}$

& summa utriusque quantitatis adhuc erit $MV \pm mv$. Quod si

 qua-

quadrata velocitatum earumdem per maſſas multiplicentur, omiſſis terminis ſe invicem deſtruentibus, erit ſumma omnis $MV^2 + mv^2$. Scilicet cum in colliſione corporum quorumcumque durorum, mollium, elaſticorum eadem ante, & poſt ictum quantitas motus ſervetur, in colliſione corporum elaſticorum eadem inſuper manet ſumma, quæ conficitur ex ſingulis maſſis ductis in quadrata ſuarum velocitatum: quod elegans theorema, ab Hugenio traditum in Propoſ. XI. Tractatus de motu corporum ex percuſſione, ab iis qui vires vivas æſtimari vellent ex maſſa, atque ex quadrato velocitatis, principium conſervationis virium vivarum dicitur. At omnis de viribus vivis, & mortuis controverſia, tamdiu inter ſummos etiam Mathematicos agitata, & quæ deinde ſubortæ ſunt de perfecta duritie corporum, de lege continuitatis, de compoſitione materiæ ex punctis indiviſibilibus, auſugientibus a ſe invicem, & mutuos contactus corporum impedientibus, metaphyſicæ quæſtiones, ut ſunt ad phyſicam promovendam, & Problemata Mechanica reſolvenda omnino inutiles, ne fuſius quidem merentur ſingulæ hoc in loco commemorari.

VI. Si fiat $M = m$, erit velocitas prioris corporis poſt ictum $= \frac{\pm 2mv}{M+m} = \pm v$, atque alterius velocitas $\frac{2MV}{M+m} = V$: æqualia ſcilicet corpora elaſtica directe ſibi invicem occurrendo permutabunt velocitates ſuas: & ſi plura hujuſmodi corpora ad quaſcumque diſtantias diſponantur in eadem recta, & quieſcant omnia præter primum, velocitas a primo ad ultimum, intermediis poſt ictum rurſus quieſcentibus, tranſibit. Cujus theorematis veritas cum ex quantitate diſtantiarum earumdem minime pendeat, etiam ſi imminutis ultra quoſcumque limites diſtantiis æqualia corpora elaſtica ſe ſe contingant, impulſu primi non niſi ultimus eadem primi impulſus velocitate cæteris ſuo loco quieſcentibus movebitur. Univerſim vero ut quieſcat poſt ictum corpus M, & ſit $MV - mV \pm 2mv = 0$, debebit eſſe $M - m : 2m = \mp v : V$, & ſi motus ad eamdem partem incipiat debebit eſſe m major quam M, minor vero ſi motus fiat in adverſas partes. Siſtetur etiam poſt ictum corpus m ſi fuerit $M - m : 2M = V : \pm v$, quod eſſe nequit ſi ante ictum directiones motuum conſpirent, & ſit v minor quam V, fieri autem poterit ſi contrariæ ſint directiones motuum, & ſit m major quam M, & velocitas primi corporis ante ictum ſit ad ſecundi velocitatem ut exceſſus maſſæ ſecundi corporis ad duplam maſſam primi.

VII.

VII. Cum velocitas a ſecundo corpore acquiſita $\frac{2M.\ V \mp v}{M+m}$ generatim ſit quarta proportionalis ad ſummam maſſarum, duplam maſſam prioris corporis, & differentiam, aut ſummam duarum occurſus velocitatum, ſi alterum corpus quieſcat ante ictum, erit velocitas ictu acquiſita $\frac{2MV}{M+m}$: & ſimili modo ſi tertium corpus n proponatur, quod eadem velocitate $\frac{2MV}{M+m}$ in motum agi a ſecundo debeat, invenietur ipſius velocitas poſt ictum $\frac{2m}{m+n} \cdot \frac{2MV}{M+m}$. At ſi primus M directe in tertium n quieſcentem velocitate V incurriſſet, fuiſſet hujus velocitas $\frac{2MV}{M+n}$. Cum itaque ſit

$$\frac{4m}{(m+n)(M+m)} : \frac{2}{M+n} = 2M + 2n : M + n + m + \frac{nM}{m},$$

ſubductis utrimque æqualibus quantitatibus $M+n$, velocitas directo incurſu acquiſita eadem, major, vel minor erit quam quæ interpoſitu alterius corporis acquiri poterit, prout quantitas $m + \frac{nM}{m}$ æqualis, major, vel minor fuerit, quam $M+n$. At inſuper ſi ſit $m=M$, vel $m=n$, erit $M+n=m+\frac{nM}{m}$: & ſi ſit $m=M+c$, ac fiat propterea $\frac{Mn}{m} = n - \frac{nc}{M+c}$, ſtatuaturque $M+c$, ſive m major quam n, erit $c - \frac{nc}{M+c}$ quantitas poſitiva, & $m + \frac{Mn}{m}$ major erit quam $M+n$: atque idipſum continget ſi fiat $m=M-c$, ſtatuaturque $M-c$ minor quam n. Quare ſi corpus intermedium primo, & tertio aut ſimul major, aut ſimul minor fuerit, velocitas a tertio acquiſita ſecundi interjectu minor erit quam quæ prodiiſſet directo primi in tertium incurſu: major autem erit tertii velocitas ſi ſecundum intermediæ fuerit magnitudinis. Si maſſæ primi, ſecundi, & tertii corporis fuerint Geometricæ proportionales, velocitas a primo in tertium ſecundi interpoſitu tranſmiſſa evadet

evadet maxima. Cum enim tunc incrementum quantitatis m æquari debeat decremento alterius $\frac{Mn}{m}$, si loco m assumamus $m+c$, & $\frac{Mn}{m+c}$ loco $\frac{Mn}{m}$, ac sit c quantitas ita exigua ut statui possit $\frac{Mn}{m+c} = \frac{Mn}{m} - \frac{Mnc}{m^2}$, posito $c = \frac{Mnc}{m^2}$ fiet $M:m = m:n$.

VIII. In casu autem massarum 1, m, m^2, m^3, m^4, &c. in ratione quavis crescentium, vel decrescentium, si prioris corporis velocitas vocetur 1, atque ipsius impulsu reliqua directe in motum, atque ordine ut antea agi debeant, erit secundi velocitas $\frac{2V}{1+m}$, tertii $\frac{2.2mV}{(1+m)(m+m^2)} = \frac{2.2V}{(1+m)^2}$, quarti $\frac{2.2.2V}{(1+m)^3}$, atque universim si numerus corporum sit x, erit velocitas, qua ultimus e loco suo dimovebitur $\left(\frac{2}{1+m}\right)^{x-1}V$. Hugenius in tractatu jam memorato cum præcedentia theoremata a se primum inventa aliis rationibus demonstrasset, posteriorem hanc formulam minime indicavit. Monuit tamen se ad normam theorematum eorumdem deprehendisse quod si centum corpora perfecte elastica accipiantur in proportione dupla, ordinenturque per lineam rectam, & motus a maximo incipiat; erit ipsius velocitas ad velocitatem corporis minimi, & ultimi ut 1:14760000000: quod si vero incipiat motus a maximo augebitur motus quantitas vicibus proxime 4677000000000: quæ duo ex posteriori formula possunt colligi. Eadem autem ratione exhiberi possent leges omnes conflictus corporum imperfecte elasticorum. Positis enim aliis denominationibus ut in §. IV., si vis compressionis se habeat ad vim, qua corpora restituuntur, ut 16:15, quod Newtonus in globis vitreis expertus est; erit velocitas corporis M post ictum

$$= V - \frac{(mV \mp mv)}{M+m} - \frac{15(mV \mp mv)}{16(M+m)} = \frac{16MV - 15mV \pm 31mv}{16(M+m)},$$

& velocitas corporis $m = \frac{31MV \mp 15Mv \pm 16mv}{16(M+m)}$: atque inde ulterius progrediendo determinari possent variationes omnes velocitatum, quæ proposito elasticitatis defectui in singulis superioribus casibus respondebunt.

IX.

IX. Hæ vero, & aliæ formulæ quævis consimiles corporum quorumcumque perfecte, aut imperfecte elasticorum, incompressibilium, mollium se se invicem percutientium, locum non habent nisi directio vis impellentis per centrum gravitatis corporis impulsi transeat, ipsiusque superficiei occurrat ad rectos angulos, aut nisi corpora in centro gravitatis quasi coalita intelligantur. Et cum gravitatis centrum sit punctum illud, circa quod æqualia omnifariam pondera disponuntur, ex jam citato §. XVII. Introd. facile colligetur, quæ prima centri, & formularum conditio esse debeat. Nam quia vis particulæ uniuscujusque ad corpus quodlibet inclinandum est ut productum massæ, & distantiæ a puncto suspensionis, si TB, LM, fig. 7., sint binæ corporis diametri se ad angulos rectos secantes in centro gravitatis G, & ex particula quavis P, aut p in planum duarum diametrorum ducantur perpendicula PQ, pq, & ex Q, aut q in diametrum LM bina alia ducantur perpendicula QR, qr; inprimis ne corpus ex TG, atque ex centro G suspensum inclinetur circa diametrum LM, summa omnium P.PQ æqualis debebit esse summæ omnium $p.pq$: deinde ne corpus inclinetur circa diametrum tertiam, quæ binas TB, LM perpendiculariter secat in centro G, summæ omnium P.RG, $p.rG$ hinc inde debebunt destrui: ac similiter destruetur summa omnium P.QR, $p.qr$ ne corpus ex tertia hac diametro suspensum inclinetur circa diametrum LM. Scilicet si fiat $GR = X$, $QR = Y$, $PQ = Z$, & massa corporis vocetur M, & sit dM elementum P, aut p, summæque omnes & supra, & infra planum, quod per gravitatis centrum traducitur, accipiantur in toto corpore, erit $\int X.dM = 0$, $\int Y.dM = 0$, $\int Z.dM = 0$.

X. Hoc dato invenietur etiam distantia centri gravitatis G a recta quavis cCc, quæ diametro cuilibet productæ LM occurrat ad rectos angulos. Nam si totum corpus ex horizontali cCc suspensum intelligatur, vires particularum P, & p erunt $P.RC + p.rC$

$= P.\overline{GC + RG} + p.\overline{GC - rG}$, atque ob $\int P.RG - \int p.rG = 0$,

erit $\int P.RC + \int p.rC = \int \overline{P + p}.GC$: scilicet distantia centri gravitatis G a recta cCc æquabitur summæ productorum ponderis, & distantiæ cujusque, divisæ per summam ponderum. Quare si ex puncto C, atque ex recta cCc, fig. 8., in plano horizontali suspendatur superficies BLC, per quam disponi uniformiter pondus aliquod intelligatur, & sit elementum ponderis $Mm.Pp$, erit distantia GC centri gravitatis G a vertice $= \frac{\int CP.Mm.Pp}{\int Mm.Pp}$. Ita si

si proponatur aliquod triangulum, & sit $Mm = \frac{BL.CP}{CE}$, $\int Mm.Pp = \frac{1}{2} BL.CE$, $\int \frac{BL}{CE}.CP^2.Pp = \frac{BL.CP^3}{3CE}$, posito $CP = CE$, fiet $GC = \frac{2}{3} CE$: ac pariter si parabola proponatur, & sit $PM = CP^{\frac{1}{2}}$, eadem calculi serie eruetur $GC = \frac{3}{5} CE$. Quod si vero proponatur solidum aliquod rotundum revolutione figuræ planæ BCE circa axem CE genitum, & radius ad peripheriam se habeat ut $1 : p$, & elementum solidi sit $\frac{1}{2} p.PM^2.Pp$, erit $GC = \frac{\int CP.PM^2.Pp}{\int PM^2.Pp}$: atque ita si proponatur conus revolutione trianguli rectanguli BCE circa latus CE genitus, summam omnium $\frac{BE^2.CP^3.Pp}{CE^2}$ dividendo per summam omnium $\frac{BE^2.CP^2.Pp}{CE^2}$, prodibit $GC = \frac{3}{4} CE$: ac simili modo in conoide parabolico eruetur $GC = \frac{2}{3} CE$. Quod si insuper intelligamus figuram quamcumque planam BCL circa axem cc rotari ultra verticem C utcumque positum, erit $p.GC$ peripheria descripta a centro gravitatis G, & $p.PC$ erit peripheria, quæ ob eamdem revolutionem describetur a puncto quocumque P ordinatæ cujuslibet Mm: & cum juxta æquationes antecedentes esse debeat $GC.\int Mm.Pp = \int CP.Mm.Pp$, sit autem $\int Mm.Pp = BCL$, erit $p.GC.BCL = p.\int PC.Mm.Pp$, videlicet solidum $p.\int PC.Mm.Pp$ eadem omni revolutione genitum æquabitur figuræ genitrici BCL ductæ in viam $p.GC$ a gravitatis centro percursam: quod elegans theorema a Pappo Alexandrino jam indicatum, probatumque inductione a Guldino, qui differentialem calculum proxime delineavit Cavalerius hac ipsa fere ratione demonstravit in suis Exercitationibus Mathematicis.

XI. Ultra casus eosdem virium per gravitatis centrum transeuntium, aut in centro ipso impressarum Wallisius, aliique authores cœperunt progredi, qui formulam centri percussionis corporum tradiderunt, quo scilicet in puncto contrariam vim imprimendo motus omnis rotationis circa axem datum conceptæ extingui potest. Formula pro casu quolibet sic invenietur. Revolvatur corpus quodcumque rigidum circa axem BCb, fig. 9., & ex centro

tro gravitatis G, atque ex punctis quibuslibet P, *p* in axem ipsum ducantur perpendicula GC, PB, *pb*. Ducantur insuper PQ, *pq* normales plano, quod per gravitatis centrum, & axem rotationis transit, junctisque QB, *qb* rectæ PM, *pm* sint pariter normales rectis PB, *pb*, atque occurrant plano ipsi in M, & *m*. Quia angularis velocitas particularum omnium simul rotantium est eadem, absoluta autem velocitas est proportionalis distantiæ ab axe motus; si velocitas centri gravitatis G vocetur φ, erit $\frac{PB.\varphi}{CG}$ velocitas puncti P secundum PM tangentem circuli radio PB descripti: eaque in duas resolvi poterit, unam $\frac{PB}{CG}.\frac{PQ}{PM}.\varphi$, sive $\frac{QB}{CG}.\varphi$ perpendicularem plano BG*b*, alteram $\frac{PQ}{CG}.\varphi$ plano ipsi parallelam. Et quia vis omnis secundum PM eodem modo agere debet in quovis demum rectæ ipsius puncto applicari intelligatur, sive in P, sive in M, relatis viribus omnibus ad planum BG*b* concipi poterit ex puncto quocumque P duplicem vim oriri in puncto M, unam $\frac{QB}{CG}.\varphi$ perpendicularem plano, alteram $\frac{PQ}{CG}.\varphi$ jacentem in plano ipso, & rectæ QB, aut CG parallelam.

XII. His positis si massa totius corporis vocetur M, & elementum massæ *d*M, ac MU, HO parallelæ sint ipsi BC; momentum particulæ P ad corpus volvendum circa axem aliquem HO priori BC parallelum erit ut vis $\frac{QB}{CG}.\varphi.dM$, quæ in puncto M applicari intelligitur, ducta in distantiam UO ab axe HO, sive erit $\frac{QB.\overline{CO-BM}}{CG}.\varphi.dM$. Jam vero si centrum percussionis ab axe BC distet intervallo CO, oportet ut impedito motu alicujus puncti in recta HO positi vires omnes ad corpus volvendum circa HO compensent se se invicem, ac destruent. Erit igitur $\int\frac{QB.CO}{CG}.\varphi.dM - \int\frac{QB.BM}{CG}.\varphi.dM = 0$: & quia est $QB.BM = PB^2$, & summa omnium $QB.dM$, juxta §. X., æqualis est massæ M ductæ in distantiam CG centri gravitatis G,

ab axe BC, erit etiam $CO = \frac{\int PB^2 . dM}{CG . M}$. At erit insuper $\frac{QB . \overline{HO - BC} . \varphi . dM}{CG}$ momentum ejusdem vis perpendicularis ad corpus rotandum circa axem alium, jacentem in plano GCB, & rectæ HO perpendicularem in puncto aliquo H. Ut itaque impedito motu puncti H neque ulla rotatio hujusmodi oriatur, debebit esse $\int \frac{QB . HO . \varphi . dM}{CG} = \int \frac{QB . BC . \varphi . dM}{CG}$, atque inde eruetur $HO = \frac{\int QB . BC . dM}{CG . M}$. Denique si motus particularum omnium fiat circa axem BCb, dirigaturque in planis eidem axi perpendicularibus, nullus inde motus exurget tertiæ cujuspiam rotationis, quæ fiat circa axem tertium plano GBb ubilibet perpendicularem, & qua semel concepta axis BCb juxta longitudinem suam progredi incipiat. Quod cum eadem ratione demonstrari possit, qua in Introductione prioris partis §. XIII. jam diximus vires perpendiculares se se invicem non afficere, centrum percussionis H in toto corpore circa axem BCb revoluto satis determinabitur si accipiatur $CO = \frac{\int PB^2 . dM}{CG . M}$, & $HO = \frac{\int QB . BC . dM}{CG . M}$.

XIII. Qui igitur percussionis centrum primo inquisierunt Cartesius, Robervallius, Wallisius, aliique decepti sunt cum in hypothesi etiam axis immobilis problemati satis fieri posse censuerunt si ex centro gravitatis G ad axem BCb ducatur perpendiculum GC, accipiaturque $CO = \frac{\int PB^2 . dM}{CG . M}$. Problemate generaliter resoluto videbimus inferius quæ tertia percussionis centri conditio debeat esse cum præter motum rotationis particulæ singulæ communem alium motum conceptum habeant, quo parallele ad longitudinem axis ferantur omnes. Erravit etiam Wallisius cum percussionis centrum idem esse censuit ac centrum oscillationis, in quo scilicet si gravitas totius corporis colligeretur oscillationes factæ circa idem suspensionis punctum essent æquidiuturnæ. Etenim oscillationis centrum cum pendeat ex gravitate acceleratrice singularum particularum semper esse debet in ea recta, quæ per gravitatis centrum perpendiculariter ad axem oscillationis ducitur, atque in diversæ densitatis mediis ob variatam gravitatem spe-

ſpecificam, atque acceleratricem variari debet. At percuſſionis centrum pendet ex abſoluta velocitate particularum omnium rotantium circa axem datum, & data rotationis velocitate in unoquoque medio debet eſſe idem. Hugenius Part. IV. Horologii Oſcillatorii genuinam centri oſcillationis formulam ex eo principio derivavit quod ſi pondúſcula ſingula ſimul oſcillantia ſoluto nexu motum ſuum ſurſum converterent, commune gravitatis centrum ad eamdem altitudinem aſcenderet, ex qua antea delapſum fuerat. Jacobus Bernoullius in Actis Pariſienſibus anno 1703 Hugenii formulam confirmavit demonſtratione ex natura vectis petita. Johannes Bernoullius in Actis anni 1714, & Taylorus in ſua incrementorum methodo concluſionem eamdem ex alio principio deduxerunt fictitiæ maſſarum ſubſtitutionis: cujus principii demonſtrationem aliam protulit Alembertus in Coroll. II. Probl. I. Cap. III. Dynamicæ. Simpſonius Sect. XI. de Fluxionibus inveſtigationem centri oſcillationis ſimpliciorem adhuc effecit præmiſſo problemate, cujus ſolutio ex duobus aliis evidentibus principiis ſimpliciſſime poteſt colligi: quod ſcilicet æquales vires perpendiculariter radiis æqualibus, & contrario ſenſu applicatæ in æquilibrio ſint inter ſe: quodque eadem vis ſecundum datæ rectæ directionem agat eodem modo, in quovis demum rectæ ipſius puncto applicari intelligatur.

XIV. Sint igitur in fig. 10. P, & O duo pondúſcula in plano verticali DCO connexa, quæ ſimul oſcillari incipiant circa punctum ſuſpenſionis C, & invenienda ſit vis omnis, qua pondúſculum P motum pondúſculi alterius O accelerat, vel retardat. Ex P, & O in horizontalem DC demittantur perpendicula PN, OD, & radio PC in P educatur perpendiculum PF. Si vis acceleratrix pondúſculi P ſecundum verticalem lineam exprimatur unitate; erit $= \frac{NC}{PC}$ vis acceleratrix pondúſculi ejuſdem P ſecundum PF, & $\frac{DC}{OC}$ vis acceleratrix pondúſculi alterius O ſecundum rectam perpendicularem radio OC. At ſi vis acceleratrix puncti O ſit $\frac{DC}{OC}$, ut idem ſit angularis motus punctorum omnium, & ſimul omnia in plano DCO circa C oſcillari incipiant, vis acceleratrix puncti P debebit eſſe $\frac{DC.PC}{OC^2}$. Quod ſi igitur pondúſculi P maſſa

vocetur P, erit $P.\frac{NC}{PC} - P.\frac{DC.PC}{OC^2}$ productum massæ in differentiam duarum virium acceleratricium, sive vis omnis motrix, quæ in puncto P, & juxta PF turbabit eumdem angularem motum totius plani. Radio OC, & centro C describatur circularis arcus OF, qui secet perpendiculum PF in F, producaturque PF in K, & sit HF radio FC, & KH ipsi FH perpendicularis. Quia vis eadem $P.\frac{NC}{PC} - P.\frac{DC.PC}{OC^2}$ secundum PF impressa aget eodem modo in quovis demum rectæ ipsius puncto applicetur, intelligatur jam applicari in puncto F, resolvaturque in duas alias secundum FC, FH. Vis prior juxta radium FC trahendo angularem motum circa C conceptum minime afficiet: altera perpendicularis radio cum sit, angularem motum turbabit eodem modo ac si in puncto O, & normaliter ad OC imprimeretur: atque ob $FK:FH = FC:PC$, & $FC = OC$, erit vis eadem omnis, qua angularis motus pondusculi O turbabitur $P.\frac{NC}{OC} - P.\frac{DC.PC^2}{OC^3}$.

XV. His positis proponatur quodcumque corpus, quod oscillari incipiat circa axem perpendicularem plano PCO in puncto C, & totum corpus dividatur in elementa quotlibet prismatica eidem plano perpendicularia, & oscillationis axi parallela. Quia particulæ singulæ secundum longitudinem elementi cujuslibet dispositæ eamdem habent ab axe motus distantiam, eamdemque angularem velocitatem; manifestum est singulas ad motum angularem totius corporis accelerandum, aut retardandum agere eodem modo, ac si elementum quodvis prismaticum in puncto P, atque in plano PCO, quod per centrum gravitatis G transit, colligeretur. Quod si igitur massa elementi cujuslibet vocetur P, & ex G in horizontalem DC ducatur perpendiculum GM, atque in recta GC accipiatur punctum quodcumque O; vis omnis motrix, qua angularis velocitas puncti O actione elementorum aliorum omnium turbabitur æquari debebit summæ omnium $P\left(\frac{NC}{OC} - \frac{DC.PC^2}{OC^3}\right)$, seu summæ omnium $\frac{P}{GC.OC^3}\left(NC.GC.OC - MC.PC^2\right)$. Ut autem motus puncti O actione aliorum elementorum minime turbetur,

betur, eodemque modo oscillari incipiat ac si gravitas totius corporis in puncto ipso colligeretur, & sit O centrum oscillationis, summa omnium P.NC.GC.OC æquari debebit summæ omnium $P.MC.PC^2$. Scilicet si massa totius corporis sit M, & elementum massæ dM, & juxta §. X. summa omnium P.NC, sive $NC.dM$ sit MC.M, ob quantitates constantes MC, GC, OC, ut O sit centrum oscillationis corporis ex C suspensi debebit esse

$$OC = \frac{\int MC.PC^2.dM}{\int NC.GC.dM} = \frac{\int PC^2.dM}{GC.M}.$$

XVI. Cum igitur hinc inde a plano, quod per gravitatis centrum traducitur, æqualia semper momenta ponderum disponantur, & centrum oscillationis semper esse debeat in plano, quod transeat per centrum ipsum gravitatis, & sit oscillationis axi perpendiculare, eadem formula oscillationis, & percussionis centro determinando inserviet pro iis casibus, in quibus percussionis centrum erit in plano per centrum gravitatis normaliter ad rotationis axem traducto. Videlicet utriusque centri, oscillationis, & percussionis distantia a puncto suspensionis habebitur si summa omnium pondusculorum ductorum in quadrata distantiarum a puncto suspensionis dividatur per productum massæ, & distantiæ centri suspensionis, & gravitatis. Inde vero etiam distantia a centro gravitatis facile eruetur. Nam si jungatur recta PG, & ex P in CO ducatur perpendiculum PA, erit $PC^2 = PG^2 + GC^2 \mp 2GC.GA$: & quia, juxta §. IX., si G sit centrum gravitatis, esse debet $\int GA.dM = 0$, ob constantem GC in superiori formula habebitur

$$OC = \frac{\int GC^2.dM + \int PG^2.dM}{GC.M} = GC + \frac{\int PG^2.dM}{GC.M}, \quad \&$$

$$GO = \frac{\int PG^2.dM}{GC.M}.$$ Hoc autem posito cum summa omnium $PG^2.dM$ in eodem corpore sit constans, atque ex suspensionis loco minime pendeat, rectangulum etiam GO.GC constans erit: & sicuti si ex puncto C suspendatur corpus, & sit GC distantia centri gravitatis a puncto suspensionis, distantia a centro oscillationis est GO; ita si corpus suspendatur ex puncto O, & sit GO distantia centri gravitatis, & suspensionis, erit GC distantia centri gravitatis, & oscillationis, semperque oscillationis, & suspensionis centra inverti poterunt. Insuper cum sit GO reciproce ut GC, datis in casu quolibet GO, & GC, ac deinde immutato suspensionis loco, dabitur nova centri gravitatis, atque oscillationis distan-

tia,

tia, minuendo scilicet, vel augendo distantiam GO in eadem ratione, qua GC augetur, vel imminuitur. Quod idem valere debet de percussionis centro cum jacet ipsum in plano per gravitatis centrum normaliter ad rotationis axem, ut supra diximus, traducto.

XVII. Positis hisce formulis, si proponatur figura plana BCL, fig. 8., quæ oscilletur circa axem per C transeuntem, & basi BL parallelum, & sit 2 PM . Pp ponduscculum, quod intelligi debet positum in puncto P; erit $CO = \frac{\int PM.CP^2.Pp}{\int PM.CP.Pp}$: & si fiat $PM = CP^{\frac{1}{2}}$, ut in parabola cujus parameter exprimatur unitate, erit $CO = \frac{\int CP^{\frac{5}{2}}.Pp}{\int CP^{\frac{3}{2}}.Pp} = \frac{5}{7} CE$, & cum sit $GC = \frac{3}{5} CE$, erit $GO = \frac{4}{35} CE$. Quare si punctum suspensionis ultra verticem removeatur quantitate A, & fiat $\frac{3}{5} CE + A : \frac{3}{5} CE = \frac{4}{35} CE : \frac{12 CE^2}{35(3 CE + 5 A)}$, hæc erit nova centri oscillationis, & gravitatis distantia. Quod si vero oscillationis axis perpendicularis sit plano figuræ propositæ BCE in puncto C; in primis summa omnium CT^2, sive $CP^2 + PT^2$ per totam semiordinatam PM acceptorum erit $CP^2.PM + \frac{1}{3} PM$. Quare erit distantia centri oscillationis, & suspensionis $CO = \frac{\int PM.CP^2.Pp + \frac{1}{3}\int PM^3.Pp}{\int PM.CP.Pp}$, & $\frac{\int PM^3.Pp}{3\int PM.CP.Pp}$ erit differentia distantiæ ejusdem in figuris, quæ aut in ipso figuræ plano, aut in latus agitantur. Ita in casu parabolæ in latus agitatæ erit $CO = \frac{5}{7} CE + \frac{1}{3}$, & distantia centri oscillationis, & suspensionis tertia parte parametri major erit quam si oscillationis axis parabolam in vertice, ut antea tangeret.

XVIII. Si planum circuli AMH, fig. 11., ex puncto C suspendantur, & CP normalis sit plano circuli, ac motus axis CP fiat in plano normali ad diametrum Mm, eadem erit velocitas punctorum omnium semiordinatæ cujuslibet FBH diametro eidem parallelæ. Quod si insuper sit Ff elementum peripheriæ, & abscissæ elementum sit Bb, erit elementum ponderis $BF.Bb = \frac{BF^2.Ff}{PM}$, eoque ducto in quadratum distantiæ ab axe

axe motus habebitur $(CP^2 + PB^2) . \frac{BF^2 . Ef}{PM}$. Et cum posito radio ad peripheriam ut $1 : p$ sit $\frac{\int CP^2 . BF^2 . Ff}{PM} = \frac{1}{2} p . CP^2 . PM^2$, & $\frac{\int PB^2 . BF^2 . Ff}{PM} = \frac{1}{8} p . PM^4$, & productum massæ, & distantiæ a puncto suspensionis sit $\frac{1}{2} p . PM^2 . PC$, priores summas per posteriorem hanc dividendo erit $PC + \frac{PM^2}{4PC}$ distantia centri oscillationis circuli a puncto suspensionis. Quod si priores eædem summæ ducantur in elementum axis Pp, fig. 12., & rursus summæ accipiantur, dividanturque per summam ponderum habebitur distantia centri oscillationis, & suspensionis in solido quolibet rotundo revolutione figuræ BLT circa axem TB genito, eritque $CO = \frac{\int \frac{1}{2} p . CP^2 . PM^2 . Pp + \int \frac{1}{8} p . PM^4 . Pp}{GC . M}$.

Ita igitur si sphæra ex diametri vertice T suspendatur, & sit sphæræ radius $TG = R$, $Tp = x$, $Pp = dx$, $PM^2 = 2Rx - x^2$, $M = \frac{2}{3} p R^3$, summas de more accipiendo, ex loco x scribendo postmodum $2R$, prodibit distantia TO centri oscillationis a vertice $= \frac{7}{5} R$, & distantia GO a centro sphæræ $= \frac{2}{5} R$. Quod si suspendatur sphæra ex puncto alio quocumque C, & sit $CT = A$, & juxta posterius theorema §. XVI. fiat $A + R : R = \frac{2}{5} R : \frac{2R^2}{5R + 5A}$, hæc erit distantia centri oscillationis a centro sphæræ, & distantia a novo suspensionis puncto erit $A + R + \frac{2}{5} . \frac{R^2}{R + A}$.

XIX. Formulæ, & theoremata hæc omnia recte jam ab Hugenio, Bernoullio, aliisque authoribus fuerunt tradita, qui de percussione corporum, ac de legibus motuum, actionumque mutuarum agere cœperant. Singula introductionis loco perstringere, & subsequentibus aliis investigationibus præmittere opus erat ne quidpiam in opere Cosmographico lector desideraret: ut etiam in introductione prioris partis jam factum est. At vero Hugenius, Wallisius, & Wrennus leges conflictus corporum pro iis dumtaxat casibus exhibuerunt, in quibus ictus per gravitatis centrum dirigitur. Bernoullius in suis Mechanico-Dynamicis Propositioni-

bus

bus de ſpontaneo rotationis centro agere cœpit, & de viribus extra gravitatis centrum utcumque impreſſis. Et licet principii loco ipſe aſſumpſerit axem ſpontaneæ rotationis, circa quem corpus impulſu vis cujuſcumque inclinari, volvique incipit jacere in plano per gravitatis centrum normaliter ad directionem vis impellentis traducto, quod non niſi in corporibus rotundis principium, ac quibuſdam aliis in caſibus habet locum, pro caſu tamen corporum ſphæricorum œconomiam motuum recte determinavit Bernoullius, & generatim oſtendit duplicem rotationis, & projectionis motum ex unica tantum vi oriri poſſe, & quæ bina videntur diverſi generis phænomena ex eodem ſimul principio proficiſci. Itaque rationem phyſicam periodici, & diurni motus in Planetis omnibus, atque in Luna etiam aperuit: cumque univerſi totius compages mutua attractione partium, & alia inſuper vi conſiſtat, qua Planetæ in directum debuerunt projici; oſtendit quæ vis projectilis directio eſſe debuit ut ea prodiret, quæ in ſingulis Planetis obtinet, proportio temporum revolutionis periodicæ, & diurnæ.

XX. Inveſtigationes earum omnium inæqualitatum, quæ ex figura Terræ non ſphærica ortum ducunt, theoriæ motus longius perducendæ occaſionem ſummis Mathematicis præbuerunt in primis Alembertio, & Eulero. De hoc etiam ipſo argumento agi in Italia noſtra cœptum eſt ab Amicis optimis Equite Julio Mozzio, & Ignatio Radicato Coconati Comite. Quæ ab utroque excogitata ſunt hacce in re breviter collegi in opuſculo de rotatione corporum, quod poſteriori volumini Bononienſium Commentariorum adjunctum eſt, & peculiarem methodum addidi, qua generales Euleri formulæ ex iiſdem Mozzii principiis facile deducuntur. Sed cum deinde oblato ſimpliciore problemate generales formulas determinando motui rotationis laminæ ellipticæ oblique impulſæ aptare voluiſſem, animadverti quam operoſus jam eſſet uſus, & quas alias æquationum reductiones ab uno ad aliud planum requireret. Deprehendi vero problematum omnium hujus generis ſolutiones facillimas, elegantesque ex eo theoremate deduci poſſe, cujus demonſtrationem jam primum dederam, & quod rationem componendorum motuum rotationis, aut etiam reſolvendorum exhibet. Et licet peculiaribus aliis Mechanicæ problematis extra inſtitutum operis Coſmographici modo evagari nolim, partem tamen hanc alteram a generali theoria motuum exordiri neceſſe erat.

COS-



COSMOGRAPHIÆ
PHYSICÆ, ET MATHEMATICÆ
PARS ALTERA.

DE THEORIA MOTUUM ROTATIONIS.
LIBER PRIMUS.

Galilæus deteᴄtis maculis Solaribus, cum earum numerum, figuram, denſitatem continue variari, ut in levioribus exhalationum partibus debet contingere, Teleſcopii ſui ope agnoviſſet, omnes tamen communi motu deprehendit ab occidente in orientem promoveri, & uno circiter lunari menſe ad priſtinum diſci locum reverti: atque inde collegit Solem ab occidente in orientem volvi circa centrum, & revolutiones ſingulas ſingulis fere menſibus lunaribus abſolvere. Revolutionis tempus Caſſinus accurate definivit. Cum enim poſt $27^{d}\ 12^{h}\ 20^{l}$ eamdem maculam ad eumdem diſci Solaris locum e Terra referri comperiſſet, eoque tempore medius Telluris motus a punᴄtis æquinoᴄtialibus ſit $27^{\circ}\ 7^{\prime}\ 20^{\prime\prime}$; tempus idem minuendo in ratione $360^{\circ} : 387^{\circ}\ 7^{\prime}\ 20^{\prime\prime}$, maculam quamlibet circa Solem, & Solem circa ſe ipſum revolvi ſtatuit tempore $25^{d}\ 14^{h}\ 8^{l}$. Poſitionem etiam æquatoris, & axis Solis definire cœpit Caſſinus: quod plures alios poſt ipſum Geometras problema exercuit. Clariſs. Kaeſtnerus accuratiorem methodum protulit, qua datis tribus obſervationibus unius maculæ elementa omnia motus

Solis circa axem proprium determinari possunt. Statuit autem hujusmodi axem ad axem Eclipticæ inclinari angulo $6^\circ\ 51'$, & æquatorem Solarem plano Eclipticæ occurrere in $2^s\ 4^\circ\ 28'$. Eulerus To. XII. Comment. Petropolitanæ Academiæ tribus observationibus problemati satis fieri tantum animadvertit in hypothesi quod maculæ adhæreant Solis superficiei, & generalem methodum tradidit, qua datis quatuor observationibus revolutionis tempus, & positio axis, & æquatoris definiri potest etiam si maculæ supra Solis superficiem assurgant, ut videbimus suo loco.

Cassinus etiam ex reversione macularum, quæ in Jovis, ac Martis disco Telescopii subsidio distingui solent, collegit Jovem $9^h\ 56'$, & Martem $24^h\ 40'$ revolvi circa centrum: Lunam autem æquali tempore & circa Terram, & circa se ipsam volvi ex eo collegit quod eædem fere lunares maculæ, atque idem Lunæ hemisphærium Terræ obvertatur. Ob solam enim vim projectionis, gravitatemque Lunæ in Terram parallelæ sibi invicem manerent diametri Lunæ omnes, & tota ipsius superficies tempore mensis unius synodici deberet conspici. Majerus cum inclinationem mediam lunaris orbitæ ad eclipticam statuisset $5^\circ\ 9'\ 8''$ ex variis macularum lunarium observationibus inclinationem axis rotationis Lunæ ad axem eclipticæ varie definivit $2^\circ\ 8'$, $1^\circ\ 21'$, $1^\circ\ 38'$. Quare si hujusmodi inclinationis angulus assumi posset 2°, esset inclinatio axis rotationis Lunæ ad planum eclipticæ 88°, & ad planum lunaris orbitæ $82^\circ\ 51'$. Revolutio Terræ circa axem, fixarum respectu, absolvitur $23^h\ 56'\ 4''$, & axis diurnæ revolutionis ad axem eclipticæ inclinatur angulo $23^\circ\ 28'\ 16''$, quæ media eclipticæ, & æquatoris terrestris est inclinatio. Jovis, & Martis axis fere perpendicularis est plano orbitæ descriptæ circa Solem, eademque rotationis directio in Terra, & Sole, quæ in Luna, Marte, & Jove est, ab occidente scilicet in orientem. In Venere, & Planetis aliis diurnus motus nullis hactenus certis observationibus definiri potuit.

Non vero idem penitus Lunæ hemisphærium, nec maculas omnino easdem toto mense synodico Telluri obverti jam antea a Galilæo observatum fuerat. Et quidem ob parallelismum lunaris axis, & inclinationem lunaris orbitæ ad Eclipticam fieri oportere adnotavit ipse ut pro varia Lunæ distantia a plano Eclipticæ, variaque meridiana altitudine supra horizontem modo unus, modo alter Lunæ polus Terræ obvertatur, & modo quædam boreales maculæ, modo aliæ meridionales in conspectum prodeant, aliæ etiam partes

hinc

hinc inde perfundantur, expolienturque solari luce, atque ea Lunæ libratio habeatur, quæ in latum dicitur. Ob ipsum vero Telluris motum circa axem proprium fieri monuit Galilæus ut non omnino eadem Lunæ facies, & mane, & vespere videri possit, atque alia habeatur Lunæ libratio in longum, ab ortu scilicet in occasum. Hanc alteram librationis speciem confirmavit ipse observationibus variæ distantiæ maris crisium a limbo occidentali Lunæ, & Grimaldæ maculæ a limbo orientali. Accuratioribus autem macularum earumdem observationibus tertia Lunæ libratio innotuit, quæ pariter in longum fit, & mensis unius lunaris periodum habet, multoque est major quam quæ ex diurno Telluris motu oriri potest. Ipsius rationem physicam Newtonus ex æquabili motu Terræ circa axem proprium, & ex inæquabili progressu Lunæ in orbita elliptica circa Terram veluti focum descripta optime derivavit.

Scilicet cum juxta Coroll. II. Probl. V. Par. I. Luna areas circa Terram, & circa alterum focum orbitæ ellipticæ describat angulos proportionales temporibus, si Luna interim circa suum centrum æquabiliter revolvi pergat, eadem semper Lunæ diameter ad alterum focum ellipseos dirigetur, & maxima diametri ipsius aberratio a centro Terræ æquabitur duplæ excentricitati per mediocrem distantiam divisæ, sive angulo $6°\ 18'$, qui proxime æquationem centri metitur. Quæ igitur Lunæ diameter in apogæo ad Terram dirigetur, eadem in Lunæ transitu ad perigæum gradibus usque $6\frac{3}{10}$ a Terra deviabit occasum versus, & Lunæ margo tantumdem ex orientali parte amplius patebit, atque ad occasum coarctabitur. In reditu ad apogæum cum Luna ad distantiam mediam perveniet eadem diameter eumdem focum constanter respiciendo a Terra deviabit contrario sensu, & marginis extremi lineam per gradus alios $6\frac{3}{10}$ ex parte adversa protendi faciet. Ita erit limes variationis hujusmodi graduum $12\frac{3}{5}$: cujus sinus versus cum sit partium 25 millesimarum radii, spatium, quod orientales, sive occidentales maculæ in extremo margine primum sedentes intra Lunæ discum conficient ad Lunæ radium se habebit ut 1:40.

Quod si dato Lunæ loco D, fig. 13., spectatoris oculus diurno motu feratur ex C in c, & inde ad superficiem Lunæ ducantur binæ tangentes CF, cA, erunt F, & A limites superficiei ejusdem e Terra visæ, & librationis diurnæ angulus FDA, sive CGc

 ma-

maxima sui quantitate æquabitur angulo, quem diameter Terræ e Luna visæ subtendet. Iis igitur retentis numeris, quos in Coroll. I. Probl. II. alterius partis assumpsimus, erit diurna hæc aberratio 1° 54' circiter sub æquatore Terræ: aliis autem in locis minuetur in simplici ratione anguli diurno motu circa axem descripti, sive in ratione simplici cosinus latitudinis: atque ita hæc altera librationis species pro varietate locorum varia, & multo minor ubique est, quam quæ pendet ex motu Lunæ & circa Terram, & circa se ipsam. Simili modo definiri potest libratio, quæ in latum fit, quæque oritur ex parallelismo axis, & inclinatione lunaris orbitæ ad eclipticam. Nam si recta CB eclipticam referat, & BCG sit angulus maximæ distantiæ Lunæ Austrum versus, Lunæque axis A*a*, seu B*b* ubique sibi parallelus maneat; angulus ADF æquabitur angulo BCG, eoque angulo bis accepto differentia disci lunaris e Terra visi in maxima, & minima meridiana altitudine supra horizontem, atque in adversis limitibus latitudinis Lunæ Australis, & Borealis æquabitur angulo duplæ inclinationis lunaris orbitæ ad Eclipticam, sive 10° 18' 16'': eaque rursus singulis mensibus lunaribus restituetur.

Neque vero ullæ sunt satis certæ observationes, quæ multo majorem Lunæ quantitatem librationis adjudicent, ut nonnulli To. I. Comment. Bononiensis Academiæ contendebant. Grimaldus enim minimam Grimaldæ maculæ ab orientali Lunæ limbo, & maris crisium ab occidentali distantiam 3, aut 4 earum partium deprehendit, quarum radius 100 complectebatur, maximam 11, aut 12. Quare cum maculæ hujusmodi æquatori Lunæ sint proximæ, & macularum distantiæ a lunari margine e Terra visæ sint sinus versi arcuum a margine extremo incipientium, sinubus autem versis 3, 4, & 11, 12 partium centesimarum radii respondeant arcus circiter 14°, 16°, & 27°, $28\frac{1}{2}$; differentiis acceptis fiet circiter $12\frac{1}{2}$°, aut 13° quæ a Grimaldo observata est Lunæ libratio ab oriente in occidentem. Hevelii, & Bullialdi observationes licet parum cum aliis Grimaldi congruant, quod tribui potest difficultati notandi margines macularum ubi transversim prope limbum videntur, non majorem tamen librationem Lunæ exhibent. Cum enim Bullialdo, & Hevelio quandoque visa sit prope limbum Grimaldi macula, & mare crisium, maxima a limbo distantia prodiit partium earumdem $5\frac{1}{2}$, aut 6. Minimam etiam distantiam centri Tychonis a limbo Lunæ australi deprehendit Grimaldus partium 22, aut 24, maximam 38, aut 40: quibus sinubus versis cum respondeant arcus

cus 47°, $48\frac{1}{2}^\circ$, & $58\frac{1}{2}^\circ$, 60° circiter; obſervata Lunæ libratio in latum paulo erit minor alia, quæ in longum fit.

His itaque omnibus librationis phænomenis ſatifiet, ubi ſtatuamus Lunam circa axem ſibi ſemper parallelum, & perpendicularem fere plano orbitæ circa Terram deſcriptæ, eadem directione motus, eodemque tempore revolvi, quo circa Terram ipſam revolvitur. Bini autem hi motus ex unica projectionis vi poſſunt repeti, atque univerſim communis motus cujuſvis corporis in directum, & motus rotationis circa gravitatis centrum conceptæ non niſi ex unica vi pendet, quæ ad datam a centro ipſo diſtantiam, ut motus utriuſque ratio poſtulat, impreſſa ſit. Antequam vero hujuſmodi theorema ex prioribus motus notionibus derivemus, progrediamurque inde ad variationes librationis Lunæ, & diurni motus Planetarum omnium ſupputandas, quæ ex gravitate mutua proficiſcuntur, generalem rotationis theoriam per partes ſingulas explicare neceſſe erit. Ad id etiam nonnulla præmittere oportebit.

LEMMA.

Sint in fig. 14. binæ rectæ HG, SG ſe invicem ſecantes ad rectum angulum in puncto G, & in earumdem planum ex puncto quocumque P demittatur perpendiculum PK, & ex K in SG ducatur perpendiculum aliud KV: tum vero ducatur planum TGL, quod planum prius ſecet normaliter in recta LG, atque ex P in planum TGL ducatur perpendiculum PQ, & ex Q in TG perpendiculum aliud QR; datiſque rectis PK, KV, VG, & angulis LGS, TGL invenire oporteat valorem rectarum PQ, QR, RG.

In primis quia PK perpendicularis eſt plano HGS, & plano TGL parallela, recta PQ perpendicularis plano TGL æqualis erit perpendiculo KD ex K in LG ducto, junctaque QD erit angulus QDG rectus, & fiet QD = PK. Sit jam

$PK = z$, $KV = y$, $VG = x$,
$QR = Z$, $PQ = Y$, $RG = X$,
ϖ ſinus, & ω coſinus anguli LGS,
π ſinus, & δ coſinus anguli TGL.

Si ex V in GL, & KD productam ducantur perpendicula Vv, Vu, & ex D in GT perpendiculum aliud Dr, erit $Gu = \omega x$, & ob æquales angulos VGv, vVK, VKu erit $Vu = vD = \varpi y$, & $GD = \omega x + \varpi y$. Erit etiam $Vv = uD = \varpi x$, & $KD = PQ = \omega y - \varpi x$. Inſuper erit $Gr = \delta . GD = \delta\omega x + \delta\varpi y$: & quia ob

ob angulum QDG rectum anguli qDr, rGD debent inter se æquari, erit $Rr = \pi . QD = \pi z$, & $GR = \delta \omega x + \delta \varpi y + \pi z$. Denique erit $QR = \delta . QD - Dr = \delta z - \pi . GD = \delta z - \pi \omega x - \pi \varpi y$. Itaque coordinatæ X, Z, Y coordinatis x, z, y plani alterius positione dati HGS exprimi poterunt si fiat

$$X = \delta \omega x + \delta \varpi y + \pi z$$
$$Z = \delta z - \pi \omega x - \pi \varpi y$$
$$Y = \omega y - \varpi x.$$

Corollarium I.

Hisce igitur quantitatibus in se ductis, reductisque fiet

I. $$Z^2 + Y^2 = (\varpi^2 + \omega^2 \pi^2) x^2 + (\omega^2 + \varpi^2 \pi^2) y^2 + \delta^2 z^2$$
$$- 2 \omega \varpi (1 - \pi^2) xy - 2 \omega \pi \delta xz - 2 \varpi \pi \delta yz.$$

II. $$XZ = - \omega^2 \pi \delta x^2 - \varpi^2 \pi \delta y^2 + \pi \delta z^2$$
$$- 2 \omega \varpi \pi \delta xy + \omega (\delta^2 - \pi^2) xz + \varpi (\delta^2 - \pi^2) yz.$$

III. $$XY = - \omega \varpi \delta x^2 + \omega \varpi \delta y^2$$
$$+ \delta (\omega^2 - \varpi^2) xy - \varpi \pi xz + \omega \pi yz.$$

Corollarium II.

Si proponatur quodcumque corpus, & elementum totius massæ sit dM, atque elementis singulis ad planum HGS relatis innotescant summæ omnes, ac fiat

$\int x^2 dM = A$, $\int y^2 dM = B$, $\int z^2 dM = C$,
$\int xy dM = D$, $\int xz dM = E$, $\int yz dM = F$; erit etiam

I. $$\int \overline{Z^2 + Y^2} . dM = (\varpi^2 + \omega^2 \pi^2) A + (\omega^2 + \varpi^2 \pi^2) B + \delta^2 C$$
$$- 2 \omega \varpi (1 - \pi^2) D - 2 \omega \pi \delta E - 2 \varpi \pi \delta F.$$

II. $$\int XZ . dM = - \omega^2 \pi \delta A - \varpi^2 \pi \delta B + \pi \delta C$$
$$- 2 \omega \varpi \pi \delta D + \omega (\delta^2 - \pi^2) E + \varpi (\delta^2 - \pi^2) F.$$

III. $$\int XY . dM = - \omega \varpi \delta A + \omega \varpi \delta B$$
$$+ \delta (\omega^2 - \varpi^2) D - \varpi \pi E + \omega \pi F.$$

Corollarium III.

Cum dato corpore dentur summæ omnes A, B, C, D, E, F, si dato angulo TGL angulum HGL augeri, aut minui intelligamus

mus angulo exiguo $d\theta$, hoc eſt ſi quantitates etiam π, & δ ſint conſtantes, & ſolæ ω, & ϖ habeantur pro variabilibus, erit $d\varpi = \omega d\theta$, & $d\omega = -\varpi . d\theta$. Quare cum ſit $1 - \pi^2 = \delta^2$ fiet

$$d.(\varpi^2 + \omega^2\pi^2)\,A = 2\varpi\omega\delta^2 A . d\theta,$$ &

$$d\,(\omega^2 + \varpi^2\pi^2)\,B = -2\varpi\omega\delta^2 B . d\theta,$$ eodemque ordine ſumptis elementis omnibus terminorum, qui ſummam omnium $\overline{Z^2 + Y^2} . dM$ exprimunt, fiet in puncto quocumque P quantitas

$$\overline{Z^2 + Y^2} . dM = -2\delta . d\theta . \int XY . dM.$$

Corollarium IV.

Pariter ſi ω, & ϖ pro conſtantibus, quantitates vero π, & δ accipiantur pro variabilibus, & ſit $d\zeta$ elementum variabilis anguli TGL, poſito $d.\pi^2 = 2\pi d\pi = 2\pi\delta . d\zeta$, & $d.\delta^2 = -2\pi\delta . d\zeta$, eodemque modo aliis omnibus elementis ſumptis fiet in puncto eodem P quantitas $\overline{Z^2 + Y^2} . dM = -2 d\zeta . \int XZ . dM$. Quare ſi binos angulos HGL, TGL, eorumque ſinus, & coſinus ſimul variari intelligamus, binis ſimul iiſdem variationibus copulatis fiet univerſim

$$\overline{Z^2 + Y^2} . dM = -2\delta . d\theta . \int XY . dM - 2 d\zeta . \int XZ . dM.$$

Corollarium V.

Si quo in caſu rectangula omnia XY, XZ, & quæ poſitiva, & quæ negativa ſunt, inter ſe æquentur, & ſimul omnia compenſent ſe ſe invicem, ac deſtruant, & fiat in toto corpore $\int XY . dM = 0$, $\int XZ . dM = 0$, erit etiam $\overline{Z^2 + Y^2} . dM = 0$. Notum eſt autem cujuslibet quantitatis valorem maximum, aut minimum tunc obtineri cum ipſius elementum evaneſcens a poſitivo ad negativum valorem tranſit. Quantitas igitur $\int \overline{Z^2 + Y^2} . dM$ in toto corpore erit maxima, aut minima cum ſimul fiet $\int XY . dM = 0$, $\int XZ . dM = 0$.

CAPUT

CAPUT PRIMUM.

DE COMPOSITIONE, ET RESOLUTIONE MOTUUM ROTATIONIS.

Theorema I.

Si durum corpus circa axem aliquem rotari incipiat, duplicem inde motum concipiet, quorum uno revolvi perget circa axem alium parallelum per centrum gravitatis transeuntem, altero projicietur uniformiter in directum: & vicissim bini motus projectionis, & rotationis circa gravitatis centrum conceptæ unicum rotationis motum circa axem alium positione datum component.

Sit BCb, fig. 9., recta, circa quam totum corpus primo nutare incipiat, ipsique ex centro gravitatis G ducatur parallela GR, atque in planum BCGR ex puncto quocumque P ducatur perpendiculum PQ, rectæque PR, PB, PM, MU ordine sint rectis aliis GR, CB, PB, CG perpendiculares. Si velocitas centri gravitatis G vocetur φ, erit $\frac{PB.\varphi}{CG}$ velocitas particulæ alterius cujusque P: eaque in duas resolvetur, $\frac{QB.\varphi}{CG}$ perpendicularem plano BGb, & $\frac{PQ.\varphi}{CG}$ plano eidem, & rectæ CG parallelam: & cum sit BR parallela, & æqualis rectæ CG, erit $\frac{QB.\varphi}{CG} = \frac{CG - QR.\varphi}{CG} = \varphi - \frac{QR.\varphi}{CG}$. Itaque perpendicularis velocitas $\frac{QB.\varphi}{CG}$ in duas alias resolvetur, quarum una particulis singulis cum gravitatis centro erit communis, altera $-\frac{QR.\varphi}{CG}$ tendet contraria directione ex Q in P. Velocitas autem hujusmodi cum velocitate $\frac{PQ.\varphi}{CG}$, quæ directionem habeat rectæ QR parallelam, componet velocitatem $\frac{PR.\varphi}{CG}$ perpendicularem rectæ

rectæ PR in puncto P, & proportionalem distantiæ a recta GR, quæque, cum in partes contrarias hinc inde tendat, communem motum minime afficiet. Itaque totum corpus dum communi motu feretur uniformiter in directum, volvetur etiam circa axem GR transeuntem per centrum gravitatis, & parallelum axi BC*b*.

Vicissim si corpus aliquod volvatur circa axem RG, atque ad velocitatem rotationis particulæ cujusvis P, velocitatem communem centri gravitatis, & distantiam PR sumatur quarta proportionalis CG, eaque perpendicularis statuatur axi RG, & directioni motus centri G, ac deinde per C ducatur BC*b* parallela axi RG; erit BC*b* axis rotationis, ex qua bini ii motus rotationis, & projectionis educi poterunt.

COROLLARIUM I.

Ita vero dum unicus rotationis motus, qui circa quiescentem axem BC*b* primo incipit, in binos alios evolvitur projectionis, rotationisque circa axem alium RG*r*; manifestum est puncta singula prioris axis B, C, *b* circularis motus velocitatem æqualem, & contrariam habere velocitati φ, qua centrum gravitatis G uniformiter in directum moveri perget. Continuato igitur motu punctum C circa ipsum centrum revolutionibus singulis cycloidem aliquam describet: puncta vero alia describent epicycloides pro varia a centro distantia correptas, aut oblungatas. Atque erit dimidia cycloidis altitudo ad basim, sive erit radius ad peripheriam ut distantia duorum axium CG ad spatium, quod integra totius corporis revolutione centrum G percurret normaliter ad planum GCB.

COROLLARIUM II.

Punctum H, aut O, cui vis impellens applicari debet ut totum corpus rotari primum incipiat circa axem positione datum BC*b*, erit centrum percussionis corporis circa axem ipsum rotantis, cui scilicet si contrario sensu imprimatur vis eadem, totus corporis motus extingui poterit. Data igitur distantia prioris axis BC*b* a centro gravitatis, atque absoluta velocitate ipsius centri, dataque idcirco ratione duorum motuum projectionis, & rotationis inveniri poterit ad quam a centro distantiam imprimenda erat vis unica, ex qua bini simul motus emergerent: & si Planetarum, Lunæ, & Satellitum aliorum orbitæ habeantur pro circularibus, data ratione temporum revolutionis periodicæ, & diurnæ, dabitur etiam directio, & quantitas vis prioris, ad quam utriusque motus phænomenon reduci potest.

D Co-

COROLLARIUM III.

Quia diſtantia OG centri percuſſionis O a centro G ſphæræ homogeneæ circa axem per C traductum oſcillantis, juxta §. XVI., & XVIII. Introd., exæquare debet duas quintas partes tertiæ proportionalis ad CG, atque ad ſphæræ radium; ſi Planetæ homogenei ſint, & figuram ſphæricam habeant, ac ſint inſuper T, t tempora revolutionis periodicæ, & diurnæ, R, r radii orbitæ, & Planetæ, $1:p$ ratio radii ad peripheriam; in primis erit pR tota orbita circa Solem a Planeta quovis propoſito deſcripta, & $\frac{ptR}{T}$ erit ſpatium a Planetæ centro percurſum circa Solem tempore unius revolutionis circa ipſum centrum: ac deinde juxta Coroll. I. hujuſmodi ſpatium minuendo in ratione radii ad peripheriam habebitur diſtantia duorum axium $CG = \frac{tR}{T}$: ac fiet denique diſtantia centri gravitatis, percuſſioniſque $OG = \frac{2Tr^2}{5tR}$.

COROLLARIUM IV.

Si parallaxis Solis mediocris ut antea ſtatuatur $9''$, & ſit radius Terræ ad mediocrem Solis diſtantiam ut ſinus anguli $9''$ ad ſinum totum, ſive ut $1:22918$; erit in Terra noſtra $CG = \frac{22918.r}{365\frac{1}{4}}$ ſive $62\frac{2}{3}$ terreſtrium ſemidiametrorum. Inde autem eruetur $OG = \frac{1}{157}.r$: ad hanc ſcilicet diſtantiam a centro applicanda erat vis prior, ut proportio temporum revolutionis Terræ diurnæ, & annuæ fieret $1:365\frac{1}{4}$. In Luna cum & periodica revolutio circa Terram, & revolutio circa axem abſolvantur eodem tempore, erit CG radius ipſe lunaris orbitæ ſemidiametrorum terreſtrium circiter 60: & cum radius Terræ ad Lunæ radium ſe habeat ut 365:100, ſi Lunæ radius vocetur r, fiet $CG = 219.r$, & $OG = \frac{1}{547\frac{1}{2}}.r$.

COROLLARIUM V.

Pariter ſi radii Terræ, & Jovis ſint inter ſe ut 1:10, diſtantiæ a Sole ut 10:52, periodica tempora circa ipſum Solem ut 1:12,

1:12, tempora revolutionum circa axes proprios ut 24:10, eodem modo eruetur $CG = \frac{52.62\frac{2}{3}.r}{10.12.24} = 1\frac{1}{8}.r$ circiter, & $OG = \frac{16}{45}.r$. Et quia denique ſunt inter ſe radii Terræ, & Martis ut 5:3, diſtantiæ a Sole ut 2:3, tempora periodica ut 1:2, tempora vero revolutionum circa axes proprios ſunt proxime inter ſe æqualia; ſi radius Martis vocetur r, erit $CG = 78.r$, & $OG = \frac{1}{195}.r$. Univerſim autem diſtantia centri gravitatis ab axe prioris rotationis erit directe ut diſtantia Planetæ a Sole, atque ut tempus diurnæ revolutionis, & reciproce ut tempus revolutionis annuæ: diſtantia vero centri gravitatis, & percuſſionis erit in ratione directa ſimplici temporis revolutionis annuæ, & duplicata radii Planetæ, atque in ratione ſimplici inverſa radii orbitæ circa Solem deſcriptæ, & temporis revolutionis circa axem proprium.

THEOREMA II.

In quovis corpore, ſi punctum aliquod fixum maneat, nullus alius motus haberi poterit quam quo circa aliquam diametrum tranſeuntem per punctum ipſum rotetur: corporis autem cujuſque liberi motus omnis ultimo ad binos motus reduci poterit, quorum uno particulæ ſingulæ revolvantur circa axem poſitione datum, altero parallele ad axem ipſum, & uniformiter feratur.

Si in fig. 15. punctum G fixum ſit, circa ipſum radio quocumque GP ſuperficies aliqua ſphærica intra corpus propoſitum ſignari intelligatur, & maxima ſuperficiei cum toto corpore utcumque motæ velocitas ſit in P, & motus directio habeatur ex P in p. Intelligatur inſuper punctum P lineolam Pp deſcribere, quæ in ipſo motus initio cum arcu circuli alicujus maximi in ſuperficie ſphærica conveniet, ducanturque ex centro G bini circuli maximi RPr, Rpr lineolæ Pp perpendiculares in P, & p, convenienteſque alicubi in R, & r: ac denique ſit Nn arcus circuli alterius per punctum quodcumque N normaliter ad Rr ducti in puncto M. Quia ob totius corporis continuitatem diſtantia punctorum omnium a ſe invicem eadem manere debet, præſto eſt punctum quodcumque N non niſi in n tranſire poſſe. Secus ſi punctum N poſt minimum idem tempus in recta Nn, aut citra, aut ultra punctum n reperiretur, ob angulum pnN rectum, diſtantiam a puncto p majorem haberet quam PN: & ſi a recta Nn in alterutram partem aberraret, directione ſua ad pla-

num RPNr inclinaretur, cui perpendicularis eſt ſemita puncti P, neque eamdem ſemper diſtantiam a punctis omnibus inter P, & p poſitis tueri poſſet. Ita vero dum punctum quodcumque N a plano circuli maximi RPr ad planum Rpr, & arcus etiam integer PN in pn, aut Pr in pr tranſibit, non niſi puncta R, r quieſcent, & RGr erit axis immobilis, circa quem planum idem RPr, & cum ipſo ſphærica ſuperficies, & totum corpus rotari incipiet. Quod ſi inſuper centro G, ac toti corpori communis aliquis motus ſuperaddatur, cujus directio jaceat in plano ad Rr normaliter in G ducto, juxta Theor. I. accipiendo quartam proportionalem ad velocitatem rotationis particulæ cujuſque P circa Rr, velocitatem communem centri G, & radium PG, fig. 9., habebitur diſtantia axis Rr ab axe alio, qui rotationem motui omni corporis æquivalentem exhibere poterit. Quod ſi denique communis motus oblique ad planum axi Rr in G normale dirigatur, in binos alios ſemper reſolvi poterit, quorum unus dirigatur in plano eodem, alter ſit parallelus axi Rr: cumque priori motu ut antea compoſito parallelus motus ſuperſit; motus omnes, qui utcumque alicui corpori poſſunt imprimi, ex binis dumtaxat motibus exſurgent, quorum uno corpus circa axem poſitione datum revolvi incipiat, altero parallele ad eumdem axem feratur.

Corollarium I.

Si $1:a$ ſit ratio ſpatiorum, quæ puncta quælibet P, & N eodem tempore perpendiculariter ad idem planum PRr conficiunt, & ſinus arcus PN vocetur c, ac motus omnis centro G immobili habeatur; invenietur facile poſitio axis RGr, circa quem motus dato quocumque tempore abſolvitur. Poſito enim ſin. N$r = z$, erit $1 : a = \text{ſin.}\,\overline{PN + Nr} : \text{ſin.}\,Nr = c.\surd(1 - z^2) + \surd(1 - c^2).z : z$, ordinandoque æquationem omnem, & radicem quadratam extrahendo, facile eruetur $z = \frac{ac}{\surd(1 - 2a\surd(1 - c^2) + a^2)}$.

Corollarium II.

Quia vero abſoluta velocitas æquatur ſpatio per tempus, quo percurritur, diviſo, angularis autem velocitas æqualis eſt abſolutæ velocitati diviſæ per diſtantiam ab axe motus; ſi elementum temporis, quo ſpatium Nn percurritur, vocetur dt, erit abſoluta velocitas

citas

citas puncti N $= \frac{Nn}{dt}$, angularis autem velocitas erit $= \frac{Nn}{z.dt} =$

$$\frac{Nn}{ac.dt}.\sqrt{(1-2a\sqrt{(1-c^2)}+a^2)} = \frac{\sqrt{(Pp^2-2Pp.Nn.\sqrt{(1-c^2)}+Nn^2)}}{c.dt};$$

adeoque nisi ambo simul spatiola Pp, Nn evanescant, semper rotationis velocitas determinari poterit.

Corollarium III.

Si omnes corporis particulæ communi aliquo motu cum centro G ferantur uniformiter in directum, ex differentia motuum ipsius centri, aliarumque particularum simili modo invenietur axis, & velocitas rotationis, quæ dempto communi motu circa centrum haberetur: tum vero communi motu in binos resoluto, & perpendiculariter, & parallele ad hujusmodi axem directo, ac perpendiculari motu composito, totus corporis motus binis aliis exhibebitur, rotationis circa axem alium parallelum, & projectionis perpendiculariter ad directionem particularum omnium rotantium, & parallele ad axem utrumque factæ.

Theorema III.

Si planum aliquod $ZHzh$, fig. 16., binis viribus ita urgeatur ut earum una circa axem Zz, altera circa axem alterum Hh seorsim rotari possit, & angulares rotationum duarum celeritates sint inter se ut C:1; binis viribus simul impressis planum omne rotabitur circa axem tertium MTm, jacentem in eodem plano, & qui a prioribus axibus Zz, Hh declinabit angulis MTZ, MTH, quorum sinus inter se erunt ut 1:C.

Concipiamus rotationes binas sic fieri, ut in oppositis sectoribus HTz, ZTh conspirent binæ motuum directiones, in sectoribus autem ZTH, zTh contrariæ sint, atque ita motu circa axem Hh concepto punctum M infra planum tabulæ deprimatur, motu autem alio circa Zz supra planum ipsum assurgat. Tum ita accipiatur recta MTm, ut ductis ML, MN ad axes Zz, Hh normalibus sit 1:C = ML: MN. Erit ML.C velocitas absoluta puncti M circa axem Zz: & MN erit velocitas puncti ejusdem circa axem alium Hh, atque ob MN = ML.C, duæ rotationis velocitates in tota recta MTm se mutuo destruent. Composita etiam velocitas puncti alterius cujusque R proportionalis erit distantiæ ab eadem recta. Ducantur enim ad HT, MT, & ZT perpendicula RO, RA, & NG,

OD,

OD, RB, PQ, & ad PQ perpendiculum aliud RV. Erit RO velocitas rotationis puncti R circa axem Hh, & velocitas rotationis circa $Z\zeta$ erit $BR.C = \frac{BR.MN}{ML} = \frac{BR.PO}{PQ} = \frac{\overline{PQ \mp PV}.PO}{PQ} =$ $PO \mp \frac{PV.MN}{ML}$, & differentia, aut summa duarum velocitatum erit $RP + \frac{PV.MN}{ML}$. Jam vero ob rectas NG, PQ parallelas angulus RPV æqualis erit angulo NoO, & similia erunt triangula rectangula RPV, NoO, NTG, ac fiet $PV = \frac{TG.RP}{TN}$: atque insuper ob similia triangula RPA, TPO, TMN erit $RP = \frac{TM.RA}{TN}$.

Itaque differentia, aut summa duarum velocitatum erit $\frac{TM.RA}{TN}.\overline{1 + \frac{TG.MN}{TN.ML}} = \frac{RA}{cos.MTN}.\overline{1 + C.cos.HTZ}$: atque ob constantem C, & datos angulos MTN, HTZ, composita omnis velocitas proportionalis erit distantiæ RA a recta Mm: quo dato planum omne circa ipsam rectam quiescentem rotari poterit.

Corollarium I.

Cum sit $\frac{TG}{TN} = cos.HTZ = cos.\overline{HTM + MTZ} = \frac{TN.TL}{TM^2} - \frac{MN.ML}{TM^2}$, erit $\frac{TM}{TN}.\overline{1 + \frac{TG.MN}{TN.ML}} = \frac{TM}{TN} + \frac{TL.MN}{TM.ML} - \frac{MN^2}{TM.TN} =$ $\frac{TN}{TM} + \frac{TL.MN}{TM.ML} = \frac{sin.HTZ}{sin.MTZ}$: eritque idcirco rotationis compositæ velocitas $\frac{sin.HTZ.RA}{sin.MTZ}$.

Corollarium II.

Si velocitas angularis circa axem Hh accipiatur loco unitatis, erit angularis velocitas circa axem $Z\zeta = \frac{MN}{ML} = \frac{sin.HTM}{sin.MTZ}$, & ve-

lo-

locitas rotationis circa axem Mm compositæ erit $= \frac{\text{ſin. HTZ}}{\text{ſin. MTZ}}$: ſcilicet angulares velocitates circa tres ipſos axes Hh, $Z\zeta$, Mm erunt ordine ut ſinus angulorum MTZ, HTM, HTZ.

Corollarium III.

Quod ſi in recta $T\zeta$ accipiatur TX, quæ ſe habeat ad TY ut C:1, jungaturque YX, ipſique per punctum T, in quo bini priores axes Hh, $Z\zeta$ ſe interſecant, ducatur parallela MTm, erit MTm axis totius compoſitæ rotationis. Fiet enim C:1 = TX:TY = ſin. TYX : ſin. TXY = ſin. MTN : ſin. MTL = MN : ML, & ſinus deviationis axis compoſitæ rotationis a duobus axibus prioribus erunt reciproce proportionales angularibus velocitatibus ſingillatim circa axes ipſos conceptis.

Theorema IV.

Si alicui corpori in punctis quotcumque F extra planum $ZH\zeta h$ poſitis binæ vires imprimantur, quarum una circa axem unum $Z\zeta$, altera circa Hh ſeorſim rotari poſſit; corpus circa axem tertium Mm rotabitur, & ſinus deviationis axis compoſitæ rotationis a duobus aliis prioribus erunt reciproce ut angulares velocitates, quæ ſeorſim circa axes ipſos conciperentur.

Primo enim ſi punctum quodcumque F circa centrum O circularem arcum deſcribat, & velocitas ſecundum tangentem ſit FO.φ, atque ex F in planum $ZH\zeta h$ ducatur perpendiculum FR; rotationis velocitas juxta Theor. I. in binas alias reſolvi poterit, quarum una FR.φ parallela erit rectæ RO, altera RO.φ perpendicularis erit plano, eritque eadem velocitas, qua punctum R circa O eodem angulari motu cum puncto F rotari poſſet. Quod ſi igitur angulares velocitates circa axes $Z\zeta$, Hh inter ſe ſint ut C:1, abſolutæ velocitates puncti F circa axes ipſos reſolventur in quatuor alias, quarum binæ BR.C, & RO perpendiculares erunt plano axium, binæ autem FR.C, & FR parallelæ erunt rectis BR, RO in puncto F. Jam vero binæ priores velocitates cum eædem ſint, quibus punctum R circa ipſos axes revolveretur, per Coroll. I. Theorematis præcedentis component velocitatem $\frac{\text{ſin. HTZ.RA}}{\text{ſin. MTZ}}$ circa axem tertium Mm. Jungatur FA, & ex A ducatur CA parallela rectæ ML ut ſint æquales anguli PRA, MTN, & ACR, LMN.

LMN. Quia circulus diametro TM descriptus, ob angulos ad L, & N rectos, transire debet per L, & N, erunt æquales anguli MTN, MLN eidem chordæ MN insistentes, & similia erunt triangula RCA, LMN, eritque RC : CA = ML : MN = 1 : C. Binæ igitur velocitates, quarum una FR parallela sit rectæ CA in puncto F, altera FR.C parallela sit rectæ RC, inter se erunt ut RC : CA, & juxta directionem aliam rectæ RA parallelam component velocitatem $\frac{FR.RA}{RC} = \frac{FR.LN}{ML} = \frac{\text{sin.}HTZ.FR}{\text{sin.}MTZ}$.

Hæc vero cum velocitate alia $\frac{\text{sin.}HTZ.RA}{\text{sin.}MTZ}$, quæ plano ZHz*b* perpendicularis est in puncto F, componet velocitatem $\frac{\text{sin.}HTZ.FA}{\text{sin.}MTZ}$ rectæ ipsi FA perpendicularem. Singula igitur puncta F, & corpus etiam quodcumque binis viribus ut antea impulsum circa axem M*m* rotabitur, qui jaceat in plano priorum axium Zz, H*h*, iisque inde declinet angulis, quorum sinus sint reciproce proportionales angularibus velocitatibus singillatim circa axes ipsos conceptis.

Corollarium I.

Bini igitur rotationis motus circa axes binos unicum rotationis motum component circa axem tertium: & vicissim unicus rotationis motus, qui circa axem M*m* fiat, resolvi poterit in duos alios circa axes H*h*, Zz: atque erit tota rotationis velocitas angularis ad angulares velocitates rotationum resolutarum ut sinus anguli HTZ ad sinus angulorum MTZ, MTH, quibus angulis iidem axes Zz, H*h* recedunt ab axe rotationis compositæ M*m*. Dato etiam axe Zz, & rotationis velocitate inveniri poterit circa quem axem H*h*, & qua velocitate rotatio alia haberi debeat ut binæ simul rotationem unicam componant circa axem datum M*m*.

Corollarium II.

Itaque compositio, & resolutio motuum non in liberis motibus dumtaxat, verum etiam in motibus rotationis habebit locum: scilicet bini motus rotationis sic componentur, ut in particulis singulis exhibeant velocitatem proportionalem distantiæ a novo axe, & directione sua perpendicularem rectæ ad axem ductæ: quod satis est ut totum corpus sine ulla partium dissociatione circa axem ipsum

ipsum rotari possit. Et sicuti ex quotcumque viribus corpori impressis vis unica semper exsurgit, & unica in plures resolvi potest; ita si plures rotationis motus imprimantur circa idem centrum, unica semper rotatio ex omnibus habebitur, & ex rotatione corporis circa axem datum alii rotationis motus circa axes alios educi poterunt.

COROLLARIUM III.

Hinc autem rursus colligitur corpus aliquod viribus quibuscumque ita impelli non posse, ut quiescente centro puncta alia in partem aliquam moveantur singula. Nam si unica vi impressa totum corpus circa axem aliquem immobilem, & per centrum transeuntem rotari incipiat, alia vi superaddita, qua consimilis alia rotatio gigni seorsim possit, dabitur axis aliquis immobilis, circa quem rotatio omnis composita absolvetur. Eodemque modo si aliis adjectis viribus tertius, quartus, & quotcumque alii excitentur motus rotationis omnibus eodem ordine simul compositis semper immobilis linea assignari poterit, circa quam unica habeatur rotatio omnibus simul corporis motibus æquivalens.

SCHOLION.

Qui de rotatione, ac motu corporum pluribus viribus impulsorum, quarum singulæ rotationem aliquam gignerent circa axem datum, agere cœperant Mathematici celeberrimi, intelligebant plane iis viribus simul impressis unicum aliquem rotationis motum consurgere. Cum autem minime pateret quanam ratione a sejunctis iis rotationibus ad motum, qui ex omnibus simul exsurgit, liceret progredi, alias problematis solvendi methodos excogitare necesse fuit. Incertum etiam, ac dubium videri poterat num sine aliqua disgregatione partium, & corporis continui solutione ex binis motibus rotationis unica tantum rotatio componi posset: quod dubium D. Alembertius proposuerat Par. II. de Mundi systemate Lib. III. Cap. I. Eum clarissimi Authoris locum ob oculos habebam cum septendecim ab hinc annis investigare cœpi, quanam ratione in plano primum, ac deinde in solido quovis proposito bini rotationis motus singillatim impressi in particulis singulis componerentur. Compositis autem motibus, elisisque iis portionibus velocitatum, quæ opponuntur sibi invicem, deprehendi velocitatem in particulis singulis residuam proportionalem esse distantiæ ab axe positione dato, & directione sua rectæ ad axem ductæ normaliter insistere, axem vero ipsum jacere

in plano duorum aliorum axium, & ſinus angulorum deviationis eſſe reciproce proportionales velocitatibus angularibus, quæ ſingillatim circa axes ipſos conciperentur. His cum nova Mechanicæ acceſſio jam facta fuerit, illico animadverti ex eo theoremate præceſſionis æquinoctiorum, & nutationis terreſtris axis facilem theoriam erui quam in diſſertationibus Luccæ editis expoſui. Poſt illud tempus Clariſs. Eques Mozzius in ſermone de rotatione corporum anno 1764 Neapoli edito, in iiſdem corporum ſphæricorum caſibus, qui rotationum compoſitionem reſpuere aliis authoribus videbantur, ſingulari methodo oſtendit perinde eſſe ſive binas vires, ex quibus motus omnis exoritur, ſive binos rotationis motus ſingillatim habitos ſimul componere. Subinde vero cum eamdem methodum rotationum componendarum in univerſa Mechanica latiſſime patere animadvertiſſem, neceſſe fuit hic etiam generalem ſolutionem problematis motus corporis utcumque impulſi eodem theoremate præparare.

CAPUT SECUNDUM.

DE MOTUUM OMNIUM GENERATIONE.

Problema I.

IN corpore utcumque moto percuſſionis centrum invenire.

Quia motus corporis cujuſcumque juxta Coroll. III. Theor. II. ſemper ad binos alios reducitur, quorum uno particulæ ſingulæ circa axem poſitione datum BCb, fig. 9., rotari incipiant, altero parallele ad axem ipſum ferantur; ſit φ velocitas rotationis centri gravitatis G, & communis velocitas parallele ad axem BCb concepta vocetur Δ, ſitque H punctum illud, cui unica vi impreſſa motus hic omnis ſiſti, atque ex adverſo rurſus produci poteſt. Erit $\frac{BQ.\varphi}{CG}$ velocitas particulæ cujuſque P perpendiculariter ad planum BCG concepta, eritque $\frac{PQ.\varphi}{CG}$ velocitas plano eidem, & rectæ CG parallela. Tum poſitis cæteris ut in §. XI., & XII. Introd., ac viribus particularum omnium juxta PM perpendicularem radio PB agentibus ad punctum M, atque ad planum BCG relatis, ſi elemen-

mentum massæ sit dM, erit $\frac{QB.\overline{CO-BM}.\varphi dM}{CG}$ momentum particulæ cujusque P ad corpus inclinandum circa axem aliquem HO in plano BCG jacentem, & parallelum axi BCb: eritque $\frac{QB.\overline{HO-BC}.\varphi.dM}{CG}$ momentum, quo corpus circa axem alium inclinabitur perpendicularem rectæ HO, & rectæ OC parallelum. Quod si igitur sit H centrum percussionis, & impedito motu ipsius puncti nullus in toto corpore circa binos hos axes motus supersit, fieri oportebit primo $\int QB.CO.dM = \int QB.BM.dM = \int PB^2.dM$, & $CO = \frac{\int PB^2.dM}{CG.M}$: ac deinde erit $\int QB.HO.dM = \int QB.BC.dM$, sive $HO = \frac{\int QB.BC.dM}{CG.M}$. At insuper cum sit $\frac{PQ.\varphi}{CG}$ velocitas, quæ directionem habet parallelam rectæ CG in puncto quocumque P, erit $\frac{PQ.\overline{HO-BC}.\varphi.dM}{CG}$ ad corpus omne volvendum circa axem tertium perpendicularem plano BCG in puncto H. Ac denique cum sit Δ velocitas parallela axi BC in puncto quocumque P, & tota motus communis quantitas sit $M\Delta$, & vis æquivalens parallele ad axem ipsum per centrum gravitatis G debeat dirigi, erit $M\Delta.GO$ quod inde orietur momentum ad corpus omne volvendum circa axem transeuntem per punctum H, & perpendicularem plano BCG. Ut ergo impedito motu puncti H nullus omnino motus habeatur circa neutrum e tribus axibus se se invicem ad angulum rectum secantibus in puncto H, ac totum corpus quiescat, oportet etiam ut bina momenta hujusmodi æquentur sibi ab adverso, & sit $\int \frac{PQ.\overline{BC-HO}.\varphi.dM}{CG} = M\Delta.GO$: & cum summa omnium PQ supra, & infra planum BCG, quod per gravitatis centrum traducitur evanescat, juxta §. IX. Introd., atque ob constantes CG, HO, & φ esse debeat $\int \frac{PQ.HO.\varphi.dM}{CG} = 0$, tres æquationes erunt, quæ percussionis centrum in unoquoque corpore universim determinabunt

I. $CO = \frac{\int PB^2 . dM}{CG . M}$

II. $HO = \frac{\int QB . BC . dM}{CG . M}$

III. $GO = \frac{\int PQ . BC . \varphi . dM}{CG . M \Delta}$.

COROLLARIUM I.

Cum sit $QB . BC = \overline{CG} - \overline{QR} . RG$, & summa omnium $RG . dM$ hinc inde a centro gravitatis signorum oppositione, & terminorum æqualitate destruatur, atque ob constantem CG sit etiam in toto corpore $\int CG . RG . dM = 0$, erit $HO = \int QR . RG . dM : \overline{CG . M}$

cumque insuper sit $PB^2 = CG^2 + PR^2 \mp 2 CG . QR$, & summa posterioris termini similiter destruatur in toto corpore, evadet $CO = \frac{\int PB^2 . dM}{CG . M} = CG + \frac{\int PR^2 . dM}{CG . M}$.

COROLLARIUM II.

Ita igitur fiet $GO = \frac{\int PR^2 . dM}{CG . M} = \frac{\int PQ . RG . \varphi . dM}{CG . M \Delta}$, & fiet insuper $GO : HO = \int PR^2 . dM : \int QR . RG . dM$. Ita videlicet tres æquationes antecedentes abibunt in binas alias quæ percussionis centro generatim determinando ex data positione axis, & rotationis velocitate, dataque velocitate parallele ad axem directa in quovis corpore sufficient

I. $\int PR^2 . \Delta . dM = \int PQ . RG . \varphi . dM$

II. $HO . \int PR^2 . dM = GO . \int QR . RG . dM$.

COROLLARIUM III.

Ut vero percussionis centrum sit in ea recta, quæ perpendiculariter ad axem rotationis per gravitatis centrum traducitur, & sit $HO = 0$, oportet ut sit etiam $\int QB . BC . dM = \int QR . RG . dM = 0$: atque ut nullus sit motus axi parallelus, qui vi unica impressa in puncto H simul sisti, atque ex adverso rursus excitari possit, oportet ut sit insuper $\int PQ . RG . dM = 0$. Quæ cum non semper quanti-

titates in omnibus corporibus evanescant, nec percussionis centrum semper erit in plano per gravitatis centrum perpendiculariter ad axem ducto, nec rotationis axis semper erit perpendicularis plano ducto per centrum ipsum, & directionem vis, qua totus corporis motus gigni, & extingui potest.

Theorema V.

Si corpori cuicumque imprimatur vis aliqua, qua circa datum axem rotari incipiat, quantitas momentorum, quæ habetur colligendo simul producta omnia massæ, velocitatis, & distantiæ ab axe motus in particulis singulis, æquabitur momento consimili vis impressæ.

Revolvi incipiat corpus circa axem aliquem Bb, atque ut antea sit φ velocitas rotationis centri gravitatis, $\frac{PB.\varphi}{CG}$ velocitas puncti cujusque P, Δ velocitas axi parallela, & quantitas motus communis totius corporis sit $M\Delta$. Statuamus motus hos omnes unica vi gigni posse, cujus directio FH plano GCB occurrat in puncto H, & sit π velocitas communis, quam ipsa gigneret si in centro gravitatis imprimeretur, ac propterea vis eadem sit $M\pi$, demissoque ex F in planum GCB perpendiculo FK dividatur in binas alias, unam $\frac{FK.M\pi}{FH}$ perpendicularem plano, alteram $\frac{KH.M\pi}{FH}$ agentem in plano ipso. Tum si vis omnis secundum PM referatur, ut antea ad planum GCB, & pariter in duas dividatur, unam $\frac{QB.\varphi}{CG}$ perpendicularem plano, & alteram $\frac{PQ.\varphi}{CG}$ parallelam rectæ CG; in primis cum sit $\int QB.dM = CG.M$, summa omnium virium perpendicularium, seu vis unica ipsis æquivalens $\frac{\int QB.\varphi.dM}{CG}$ erit $M\varphi$: Deinde vero cum summa virium omnium $\frac{PQ.\varphi.dM}{CG}$ parallelarum rectæ CG destruatur in toto corpore, supererit vis $M\Delta$ parallela axi Bb. Cumque vires hujusmodi ex binis viribus $\frac{FK.\Delta}{FH}$, & $\frac{KH.\Delta}{FH}$

juxta

juxta FK, & KH in puncto H impressarum exsurgant, & cum insuper quibus viribus motus aliquis gignitur, iisdem contraria directione, eodemque in loco impressis destrui debeat motus omnis; ut impedito motu puncti H nullus in toto corpore motus supersit, debebit esse KH parallela axi Bb, $\frac{KH.\Delta}{FH} = M\Delta$, & $\frac{FK.\Delta}{FH} = M\phi$.

His positis cum sit $CO = \frac{\int PB^2.dM}{CG.M}$, erit momentum vis perpendicularis $\frac{FK.\Delta}{FH}$ circa axem Bb exercitum $\frac{FK.\Delta}{FH}.CO = CO.M\phi = \frac{\int PB^2.\phi.dM}{CG}$: æquale scilicet summæ particularum omnium ductarum in totam rotationis velocitatem, atque in distantiam ab axe motus.

Corollarium I.

Si manentibus punctis P, & O punctum C longius semper abire intelligatur, rectæ CO, PB, CG ad parallelismum, & ad æqualitatem accedent propius quam pro data qualibet differentia. Cum autem fiet ultimo $CO = PB$, motus punctorum P, & O secundum lineas parallelas dirigetur, & rotationis motus in progressivum definet, ac quantitas motus projectionis æquabitur quantitati vis impressæ. Alia igitur in corporibus libere sibi occurrentibus, alia in corporibus rotantibus, & oscillantibus lex erit, ut cum illa ante, & post ictum eamdem quantitatem motus tueantur, hæc eamdem tueantur semper quantitatem momentorum.

Corollarium II.

Et qua ratione in corporibus libere sibi occurrentibus ex quo eadem maneat ante, & post ictum corporum motus quantitas, data velocitate ante ictum determinatur velocitas post ictum; ita etiam in corporum oscillatione, & rotatione cum eadem servetur momenti quantitas, quod ex massa, & velocitate uniuscujusque particulæ æstimatur, atque ex distantia ab axe motus, dato momento vis impressæ determinari poterit velocitas rotationis. Scilicet angularis velocitas æqualis erit producto vis motricis, & distantiæ ab axe motus diviso per summam elementorum omnium ductorum in quadrata distantiarum singularum ab axe ipso: absoluta autem veloci-

tas

tas particulæ cujuſque æquabitur angulari velocitati ductæ in diſtantiam particulæ propoſitæ ab axe. Et ſi plures vires eidem corpori ſimul imprimantur, ſimili modo dividenda erit ſumma productorum omnium vis cujuſque, & diſtantiæ ab eodem axe.

COROLLARIUM III.

Cum inſuper ſit $GO = \frac{\int PR.^2 dM}{CG.M}$, & ſit $\frac{PR.\varphi}{CG}$ velocitas rotationis, quæ circa axem RG priori BC parallelum, & circa gravitatis centrum debet exſurgere, momentis ad hunc ipſum axem relatis erit $\frac{FK.\Delta.GO}{FH} = GO.M\varphi = \frac{\int PR^2.\varphi.dM}{CG}$: nimirum momentum vis impreſſæ reſpectu axis RG adhuc æquabitur ſummæ momentorum omnium rotationis alterius, in quam prioris rotationis motus ſepoſito communi particularum omnium motu reſolvitur.

COROLLARIUM IV.

Erit etiam $CG.M\varphi$ differentia momentorum duarum rotationum, quæ circa binos axes parallelos per C, & G tranſeuntes haberi poſſunt: æqualis ſcilicet momento ſtrati alicujus cylindrici, per cujus ſuperficiem intelligatur maſſa corporis diſtribui, & cujus radius ſit CG, velocitas autem particulæ cujuſque circa axem ea ſit, qua primo gravitatis centrum moveri incipit. Momentum denique rotationis circa axem tranſeuntem per centrum gravitatis erit minimum momentorum omnium, quæ circa alios parallelos axes ſimiliter poſſent colligi: & circa axes alios differentia momentorum augebitur in ſimplici ratione diſtantiæ ab eodem centro.

COROLLARIUM V.

Si corpori cuicumque ex adverſis punctis imprimantur vires contrariæ, quibus æquales velocitates centro gravitatis in partes contrarias poſſint imprimi, iiſque ſe ſe invicem deſtruentibus ſolus ſuperſit motus rotationis circa axem tranſeuntem per centrum ipſum; momentum virium omnium ſimul impreſſarum æquabitur momento totius corporis circa hujuſmodi axem rotantis. Momentum enim cujuſque vis circa axes alios parallelos æquabitur momento initialis rotationis: atque ob deſtructum communem projectionis motum differentiæ omnes momentorum circa axem tranſeuntem per centrum gra-

gravitatis, & circa axes alios parallelos ſe mutuo deſtruent. Tum ergo momentum virium dividendo per ſummam productorum omnium ex maſſa particulæ uniuſcujuſque in quadratum diſtantiæ ab axe per gravitatis centrum traducto prodibit velocitas rotationis.

Theorema VI.

Si corpus aliquod ob vim quamcumque inclinari primum incipiat circa axem aliquem poſitione datum, & duplex inde motus oriatur projectionis, & rotationis circa centrum gravitatis; motus projectionis idem erit ac ſi in centro ipſo, parallela cum directione, impreſſa fuiſſet vis omnis: motus autem rotationis erit idem, ac ſi fixum maneret centrum, & vis omnis in ſolum projectionis motum impenderetur.

Poſitis omnibus denominationibus præcedentibus ſi Δ ſit velocitas, quæ in particulis ſingulis parallele ad axem dirigitur, & φ velocitas qua gravitatis centrum projicitur perpendiculariter ad planum BCG, quæque toti pariter corpori eſt communis, utraque autem gignatur vi $M\pi$ juxta directionem FH impreſſa in puncto H, & æquali vi in adverſam partem reagente extingui poſſit; in primis ob KH parallelam utrique axi BC, & RG, atque ob

$\frac{KH.\pi}{FH} = \Delta$, & $\frac{FH.\pi}{FH} = \varphi$, velocitas utraque eadem erit,

quam binæ vires parallele ad KH, FK, ſeu quam vis unica $M\pi$ parallele ad rectam FH impreſſa in centro gravitatis potuiſſet gignere. Deinde vero ſi vi omni juxta FH impreſſa in puncto H, & motu primum ſuborto circa axem BC ſit Δ velocitas axi parallela, & $\frac{PB.\varphi}{CG}$, ſive $\varphi + \frac{PR.\varphi}{CG}$ ſit velocitas rotationis particulæ cujuſ-

que P; intelligamus aliam æqualem vim parallele ad FH, & contraria cum directione imprimi in centro G. Orientur inde ex adverſo velocitates binæ $-\Delta$, & $-\varphi$, quibus communis centri gravitatis, & particularum omnium aliarum motus extinguetur. Hoc autem in caſu fixum maneret centrum gravitatis, & ſola ſupereſſet velocitas $\frac{PR.\varphi}{CG}$ proportionalis diſtantiæ ab axe RG, quæ-

que eſt ipſa velocitas rotationis circa gravitatis centrum conceptæ. Quod ſi igitur cuicumque corpori imprimatur vis quælibet cujus directio per gravitatis centrum non tranſeat idem projectionis: motus habe-

bebitur ac si in centro vis omnis parallela directione imprimeretur, & velocitas rotationis inde ortæ eadem erit, quæ circa axem fixum RG eadem vi suo loco impressa produci posset.

Corollarium I.

Directio itaque, & quantitas communis motus, sive qui parallele ad rotationis axem dirigitur, sive qui perpendicularis est plano per axem ipsum, & gravitatis centrum traducto, minime pendet ex loco, & ex distantia a centro, in qua imprimitur vis motrix, quæque non nisi velocitatem rotationis circa centrum ipsum conceptæ potest afficere: atque ita pro invenienda velocitate rotationis, quæ data vi, & dato in loco libere impressa circa axem datum inducitur, neglecto communi motu, axis ipse veluti fixus spectari poterit.

Corollarium II.

Quia productum vis impressæ, & distantiæ ab axe rotationis juxta Theor. IV. æquatur summæ productorum omnium distantiæ ab axe, & velocitatis particulæ uniuscujusque, vel summæ quadratorum omnium distantiæ ab axe ductorum in velocitatem rotationis illius particulæ, cujus distantia exprimitur unitate; data vi, & dato axe rotationis augebitur velocitas in simplici ratione distantiæ axis, & vis impressæ: eædemque erunt velocitates rotationis genitæ ab iis viribus, quæ sint reciproce, ut distantiæ ab axe motus.

Problema II.

Data vi, quæ cuicumque corpori imprimitur, invenire æquationes, quæ positionem axis rotationis conceptæ circa gravitatis centrum determinant.

Sit in fig. 17. Gh perpendiculum ex centro gravitatis G demissum in directionem vis impressæ FH, & in plano per Gh traducto perpendiculariter ad directionem ipsam Fh sit SG perpendicularis rectæ Gh. Quod si insuper plano SGh perpendiculare sit planum TGL, & rotationis axis TG parallelus sit rectæ HO, demissoque in HO perpendiculo GO, ex puncto h ducatur recta parallela interfectioni planorum LG; ea cum recta HO ita concurret in puncto O ut anguli TGL, HOh, HFK æquales sint inter se. Denique ex puncto quocumque P propositi corporis in planum TGOH ducatur perpendiculum PQ, & ex puncto Q in axem TG ducatur perpendiculum aliud QR, ac fiat PQ $=$ Z, QR $=$ Y, RG $=$ X, & vocetur ut antea ϖ sinus, & ω cosinus anguli LGS,

F ϖ

π vero ſinus, & ς coſinus anguli TGL. Erit $PR^2 = Z^2 + Y^2$, & manentibus cæteris ut in quarto Theoremate erit $\frac{KH}{FK} = \frac{\Delta}{\varphi} = \frac{\pi}{\varsigma}$:

& ſi ex h in LG ducatur perpendiculum hv, rectæque LG, & hv in plano TGL erigatur perpendiculum vV, jungaturque VH in plano TGOH; ob rectos angulos Vvh, vhH, OhH, erit $hv = HV = GO = \omega . Gh$. Erit etiam $Oh = \varsigma . HO = \pi . Gh$. Cum itaque reductis tribus prioris problematis æquationibus in corollario ſecundo binæ aliæ æquationes prodierint, quæ percuſſionis centrum ex dato motu, & viciſſim poſitionem axis, velocitatemque corporis determinant ex data quantitate, ac directione vis impreſſæ

I. $\Delta . \int PR^2 . dM = \varphi . \int PQ . RG . dM$

II. $HO . \int PR^2 . dM = GO . \int QR . RG . dM$,

ſpeciebus ut antea ſubſtitutis, & coordinatis corporis ad planum TGOH relatis binæ æquationes aliæ habebuntur

I. $\pi . \int \overline{Z^2 + Y^2} . dM = \varsigma . \int XZ . dM$

II. $\pi . \int \overline{Z^2 + Y^2} . dM = \omega \varsigma . \int XY . dM$.

Corollarium I.

Si ſit $\Delta = 0$, hoc eſt ſi nullus ſit motus parallelus axi rotationis corporis ob $\frac{\Delta}{\varphi} = \frac{\pi}{\varsigma}$ erit etiam $\pi =$ ſin. TGL $=$ ſin. $HOh = 0$, & rotationis axis jacebit in plano per gravitatis centrum traductο, & directioni vis impreſſæ occurrente ad rectos angulos. Hoc inſuper in caſu erit $\varsigma = 1$, & fiet $\frac{\pi}{\omega} = \frac{\int XY . dM}{\int \overline{Z^2 + Y^2} . dM}$. Quod ex priori etiam ſolutione problematis colligitur: nam ſi corpus revolvatur circa axem datum, & deſtruentibus ſe ſe viribus aut agentibus in plano per axem ipſum, & gravitatis centrum traducto, aut plano ipſi parallelis, nullus ſuperſit motus parallelus axi; vis, quæ ex viribus omnibus perpendicularibus exſurget, directionem habebit plano propoſito perpendicularem.

Corollarium II.

Si proponatur lamina aliqua plana cujuſcumque figuræ $ABab$, fig. 18., & vis impreſſæ directio in ipſa jaceat, manifeſtum eſt motum

om-

omnem in plano laminæ, & circa axem aliquem laminæ perpendicularem fieri oportere. Quod si directio vis impressæ perpendicularis sit laminæ ABab in puncto quocumque H, manifestum est pariter nullam posse aut vim, aut motum inde exsurgere, qui in plano laminæ dirigatur. In posteriori itaque hoc casu rotationis axis LGl jacebit in plano ABab, ductaque SG perpendiculari ad GH, & posita perpendiculari PR $=$ Y, RG $=$ X, erit $\frac{\varpi}{\omega} =$ tang. LGS $= \frac{\int XY \cdot dM}{\int Y^2 \cdot dM}$.

Si vis oblique ad ABab dirigatur, resolvaturque de more in binas alias, utraque simul rotatio habebitur, & circa axem LGl, & circa axem alium perpendicularem laminæ in centro G, atque ita axis rotationis totius compositæ dato angulo ad planum ABab inclinabitur.

COROLLARIUM III.

Si proponatur solidum aliquod rotundum revolutione figuræ planæ ABab circa rectam Aa genitum, & directio vis impressæ in plano aliquo per Aa ducto utcumque jaceat, ob partes æquales, similes, & similiter hinc inde positas, motus omnis fieri non poterit nisi circa axem plano ipsi perpendicularem. Quod si autem vis impressa dirigatur in plano circuli alicujus normaliter ad Aa secto, vis ipsa utrimque æqualiter se habebit ad binas partes, quæ plano per Aa ducto, & vis impressæ directionem normaliter secante dividentur, æqualia hinc inde erunt momenta virium, atque axis motus ab hujusmodi plano abduci nequaquam poterit. Universim etiam si planum per gravitatis centrum perpendiculariter ad directionem vis impellentis ductum dividat totum corpus in partes æquales, similes, & similiter hinc inde positas, rotationis axis pariter per centrum ductus jacebit in eodem plano.

SCHOLION.

Tres illæ formulæ, quas in Probl. I. ex ipsa motuum rotationis genesi collegimus, eædem sunt, quas sua methodo Mozzius invenerat in tractatu de rotatione corporum: & binæ aliæ, quas in Probl. II. ex prioribus eduximus, eædem sunt quas pariter alia methodo invenerat Eulerus in Propos. LIX. de motu corporum rigidorum. Priores etiam formulæ theorema aliud continent, quod quinto loco exposuimus, & quo ostendimus generatim in corporibus oscillantibus, ac rotantibus circa axem aliquem, & utcumque aut agentibus in se invicem, aut impulsis non eamdem quidem

 quan-

quantitatem motus, ut in directis occursibus servari, sed eamdem quantitatem momentorum, summam videlicet quantitatum motus ductarum in singulas distantias ab axe motus. Inde vero collegimus elegans aliud theorema: rotationis, & projectionis motus eadem vi simul genitos eosdem esse, ac si alteruter tantum haberetur, si scilicet aut centrum gravitatis fixum maneret, & solus haberetur motus rotationis, aut vis omnis imprimeretur in centro gravitatis, & solus projectionis motus exsurgeret. Newtonus in Lem. III. & Prop. XXXIX. Lib. III. Princip. Mathem. cum dato motu, qui in exteriori terra a perturbatricibus Solis, & Lunæ viribus induci debet, investigaret qua lege ad interiorem globum motus transire, & qui in tota terra motus residuus esse posset, principium conservationis ejusdem semper quantitatis motus in corporibus rotantibus æque ac in aliis libere impulsis locum habere censuit. In dissertatione de variationibus diurni motus anno 1759 Luccæ edita ex vulgaribus centri oscillationis, & percussionis formulis primum collegeram quantitati motus in rotatione corporum quantitatem momentorum substitui oportere, & simplicissimo etiam exemplo confirmavi, quod modo reassumere non pigebit. Corpus N, fig. 19., virga inflexili NA alligatum circa immobile punctum A oscilletur, & corpus aliud M in motum agat. Sit C velocitas, qua primum oscillari incipit corpus N, & c velocitas, quam amittit agendo in corpus M, adeoque velocitas residua sit $C-c$. Vis tota, qua aget in corpus M, erit $\frac{N.NA.c}{MA}$, & velocitas a corpore M acquisita erit $\frac{N.NA.c}{M.MA}$. Quia vero corpora N, & M eadem virga inflexili alligata, post communicationem motus, eadem etiam velocitate angulari moveri debent, erit $C-c : \frac{N.NA.c}{M.MA} = NA:MA$. Inde vero eruetur $c = \frac{M.MA^2.C}{N.NA^2+M.MA^2}$, & fiet $C-c = \frac{N.NA^2.C}{N.NA^2+M.MA^2}$. Erit igitur quantitas motus post communicationem omnem

$$N.\overline{C-c} + \frac{M.N.NA.c}{M.MA} = \frac{N^2.NA^2.C + M.N.NA.MA.C}{N.NA^2+M.MA^2} :$$

&

& quantitatem motus in utroque corpore multiplicando per diſtantiam a centro motus, erit utriuſque momenti quantitas N. NA. C, eadem ſcilicet, quæ ante communicationem motus habebatur. Id ſingillatim explicandum erat ne adhuc quiſpiam in reſolutione problematis præceſſionis æquinoctiorum, quæ hiſce principiis innititur, dubius hærere poſſet. Hiſce vero explicatis præſtabit formulas inclinationis axis, & rotatoriæ velocitatis pro unoquoque caſu corporum regularium, aut irregularium ex aliis formulis poſterioris problematis eruere.

CAPUT TERTIUM.

DE ROTATIONIS AXE, ET VELOCITATE CORPORUM REGULARIUM.

PROBLEMA III.

IN ſphæra utcumque impulſa motum rotationis circa centrum conceptæ determinare.

In primis manifeſtum eſt quod ſi planum alicujus circuli circa axem normaliter e centro eductum revolvatur, & in diſtantia illa a centro, quæ exprimitur unitate, velocitas etiam rotationis pro unitate accipiatur, atque in diſtantia r a centro velocitas ſit $= r$, & radius ad peripheriam ſe habeat ut $1 : p$; erit momentum peripheriæ circuli radio r deſcripti $= pr^2$, & momentum idem multiplicando per elementum radii variabilis dr, ſummaſque accipiendo erit momentum totius areæ circularis $= \frac{1}{4} pr^4$. Deinde, quia, per corollarium poſterius, axis rotationis ſphæræ TB debet eſſe, in fig. 12., perpendicularis plano ducto per centrum G, & directionem vis, quæ imprimitur in vertice L diametri alterius Ll; dividi intelligatur ſphæra planis quibuslibet axi TB normalibus, & non jam radius variabilis ſectionis circularis, ſed ſphæræ propoſitæ ſemidiameter TG vocetur r, & ſit $TP = x$, $Pp = dx$. Erit momentum ſegmenti ſphærici altitudinis Pp circa axem ipſum $= \frac{1}{4} p . PM^4 . Pp = \frac{1}{4} p (4r^2 x^2 - 4rx^3 + x^4) dx$: momen-

tum

tum totius segmenti sphærici altitudinis TP, sive x erit $= \frac{1}{4} p \left(\frac{4}{3} r^2 x^3 - r x^4 + \frac{1}{5} x^5 \right)$: & positio $x = 2r$ fiet momentum sphæræ integræ $= \frac{4}{15} p r^5$. Quod si velocitas rotationis in puncto L vocetur C, & in distantia illa ab axe, quæ exprimebatur unitate, velocitas sit $= \frac{C}{r}$, atque hæc ipsa quantitas in æstimanda velocitate accipiatur loco unitatis, evadet idem momentum sphæræ circa diametrum revolutæ $= \frac{4}{15} p r^4 C$. Jam vero, juxta Theor. IV., hoc idem esse debet momentum $r . M\pi$ vis totius $M\pi$ impressæ in vertice diametri alterius perpendicularis. Erit igitur $C = \frac{15 . M\pi}{4 p r^3}$, & loco massæ M totius sphæræ scribendo $\frac{2}{3} p r^3$, fiet $C = \frac{5}{2} . \pi$.

Corollarium I.

Si circa axem TB volvatur sphærois sub polis T, B compressa, & sit æquatoris radius $GQ = a$; momenta circulorum parallelorum, qui radiis PM, PN in sphæra inscripta, & in sphæroide describentur, inter se erunt ut $PM^4 : PN^4 = GL^4 : GQ^4 = r^4 : a^4$. Quæ ratio cum in sectionibus omnibus perpendicularibus axi sit constans, erit momentum sphæroidis oblatæ circa polos revolutæ $= \frac{4}{15} p a^4 C$: & si velocitas rotationis in æquatore sphæroidis Q vocetur c scribendo $\frac{rc}{a}$ loco C prodibit idem sphæroidis totius momentum $= \frac{4}{15} p a^3 r c$.

Corollarium II.

Quod si vis eadem $M\pi$, quam antea superficiei sphæræ statuimus impressam fuisse in puncto L, modo in æquatore sphæroidis Q applicari intelligatur, erit similiter ipsius momentum $a . M\pi = \frac{4}{15} p a^3 r c$, sive erit $c = \frac{15 M\pi}{4 p a^3 r}$: atque ita angulares velocitates $\frac{C}{r}$, $\frac{c}{a}$, quæ eadem vi $M\pi$, sive in L, sive in Q appli-

plicata in ſphæra, & ſphæroide gigni poſſunt, inter ſe erunt ut $\frac{15 M\pi}{4pr^4} : \frac{15 M\pi}{4pa^3r}$, in triplicata ſcilicet ratione axis majoris ſphæroidis ad minorem.

Corollarium III.

Si ſphærois eadem compreſſa non circa axem, ſed circa aliquam æquatoris diametrum volvatur ſimul cum ſphæra circumſcripta, ducanturque quotcumque plana eidem diametro perpendicularia; dividetur ſphærois in ſimiles ellipſes, & ſphæra in totidem circulos, quorum radii æquales erunt ſemiaxibus majoribus ellipſium, ad minores autem ſemiaxes ſe habebunt ut major ſphæroidis ſemiaxis a ad minorem r. Et ſi ſphærois accedat proxime ad ſphæram, momentum cujuſque ellipſeos cenſeri poterit æquale momento circuli ejuſdem areæ, cujus radius ſit medius proportionalis inter ellipſeos ſemiaxes, & ad radium circuli in ſphæra circumſcripta ſecti ſe habeat ut $\sqrt{ar} : a$. Itaque momenta ellipſeos in ſphæroide, & circuli in ſphæra circumſcripta ſecti, inter ſe erunt in conſtanti ratione $a^2r^2 : a^4 = r^2 : a^2$. Et quia ſi velocitas rotationis in æquatore ſphæræ vocetur c eſt ſphæræ momentum $\frac{4}{15} pa^4c$, erit momentum propoſitæ ſphæroidis $\frac{4}{15} pa^2r^2c$.

Corollarium IV.

Eodem modo ſi proponatur ſphærois oblonga, quæ ad inſcriptam ſphæram proxime accedat, & circa minorem axem revolvatur, ductis quotcumque planis minori axi normalibus dividetur ſphærois in totidem ellipſes ſimiles, & ſphæra inſcripta in circulos, ac momentum cujuſque ellipſeos proxime æquabitur momento circuli ejuſdem areæ, cujus ſcilicet radius ad radium circuli in ſphæra ſecti ſe habeat ut $\sqrt{ar} : r$. Patet enim quod ſi ex ellipſi, & circulo ejuſdem areæ circa idem centrum deſcripto dematur area, quæ utrique communis eſt, ſpatiorum in ellipſi, & circulo ſuperſtitum latitudo, ob proximitatem ſphæræ, & ſphæroidis, exigua erit, & ejus latitudinis puncta omnia cenſeri poterunt diſtantiam a centro motus, velocitatemque, ac momentum habere æquale. Momenta igitur ſphæræ, & ſphæroidis inter ſe erunt ut $r^2 : a^2$, & cum ſphæræ ipſius inſcriptæ momentum ſit $\frac{4pr^5c}{15a}$, poſito quod in vertice ſemi-

semiaxis majoris a velocitas vocetur c, erit sphæroidis momentum $\frac{4}{15}pr^2ac$.

Corollarium V.

Pariter si proponatur sphærois, quæ accedat proxime ad sphæram, quæque simul oblata, & oblonga sit, quæ scilicet meridianum simul, & æquatorem, sectionemque alteram per polos factam, & meridiani plano normalem habeat ellipticam, quæque gignatur ellipsi circa majorem axem sic revoluta, ut vertex minoris axis ellipsim aliam describat: & si insuper sit r minor sphæroidis semiaxis, major a, & b semiaxis tertius meridiani plano, minorique, ac majori semiaxi in centro perpendicularis, & tota sphærois circa minorem axem $2r$ rotetur, & velocitas rotationis in distantia a ab ipso axe vocetur c; erit sphæroidis momentum $\frac{4}{15}pb^2arc$: in utraque enim sphæroide & oblonga, & oblata simul, oblongaque areæ sectionum minori eidem axi perpendicularium debent esse inter se quam proxime ut $ar : ab$, momenta vero ut $r^2 : b^2$.

Problema IV.

Data vi, quæ perpendiculariter laminæ cuicumque planæ ABab imprimitur in puncto H, fig. 18., invenire axem rotationis.

Sit rotationis axis LG, ductaque SG perpendiculari ad HG, & ex puncto quocumque P demissis in eumdem axem, & in binos axes figuræ Aa, Bb perpendiculis PR, PM, PF, fiat $y = PF$, $x = FG$, $h = \text{sin.}\,LGA$, $l = \text{cos.}\,LGA$, $f = \text{sin.}\,HGA$, $g = \text{cos.}\,HGA$, & sint ut antea π, & ω sinus, & cosinus anguli LGS. Ex notis formulis trigonometricis eruetur

$$h = \omega g + \pi f \qquad l = \pi g - \omega f$$

$$\pi = gl + hf \qquad \omega = hg - lf$$

$$PR = hy - lx \qquad RG = ly + hx.$$

His positis cum juxta postremam æquationem Probl. II. esse debeat $\frac{\pi}{\omega} = \frac{\int PR.RG.dM}{\int PR^2.dM}$, si coordinatis ad figuræ axes Aa, Bb relatis summæ omnium xy se destruant, erit

$$\frac{\pi}{\omega} = \frac{hl.\int \overline{y^2 - x^2}.dM}{h^2.\int y^2.dM + l^2.\int x^2.dM}:$$

& si

& si summa omnium $x^2 dM$ ut antea vocetur A, & summa omnium $y^2 dM$ vocetur B, fiet

$$\frac{\varpi}{\omega} = \frac{gl + hf}{hg - lf} = \frac{B - A}{\frac{h}{l}B + \frac{l}{h}A}:$$

reductisque terminis, & posito $h^2 + l^2 = 1$, fiet denique

$$\frac{h}{l} = \frac{-gA}{fB}, \ \& \ \frac{\varpi}{\omega} = \frac{gf.\overline{A - B}}{g^2 A + f^2 B}.$$

Jam vero si PF, sive y sumatur constans, & loco dM accipiatur dx, erit in tota recta MN summa omnium $y^2 dM = y^2 x$, & summa omnium $x^2 dM = \frac{1}{3}x^3$: cumque hujusmodi summæ hinc inde ab axe AG debeant esse æquales, si a vertice A incipiendo fiat $AG = a$, $AM = v$, $MN = u$, & sit propterea $PF = y = \pm a \mp v$, erit in toto plano proposito $A = \int \frac{2}{3} u^3 dv$, & summis omnium MN^3 hinc inde ab eodem axe per totam diametrum acceptis erit $B = 2\int (a^2 - 2av + v^2) u dv$: atque hisce ultimo quantitatibus substitutis fient præcedentes ipsæ æquationes

$$\frac{h}{l} = \frac{-g.\int \frac{1}{3} u^3 dv}{f.\int (a^2 - 2av + v^2) u dv}$$

$$\frac{\varpi}{\omega} = \frac{gf.\int (\frac{1}{3} u^2 - a^2 + 2av - v^2) u dv}{g^2 \int \frac{1}{3} u^3 dv + f^2.\int (a^2 - 2av + v^2) u dv}.$$

Corollarium I.

Si proponatur aliquod rectangulum altitudinis $2a$, & latitudinis $2k$, erit $u = k$, $A = \frac{4}{3} k^3 a$, & $\int (a^2 - 2av + v^2) k dv = ka^2 v - kav^2 + \frac{1}{3} kv^3$, substituendoque $2a$ loco v fiet $B = \frac{4}{3} ka^3$, atque ita erit $\frac{h}{l} = \text{tang. LGA} = \frac{1}{\text{tang. LGB}} = \frac{-gk^2}{fa^2} = -\text{tang. HGB}.\frac{k^2}{a^2} = \frac{-k^2}{a^2.\text{tang. HGA}}$: scilicet in dato quovis rectangulo, data ratione $k^2 : a^2$, tangentes angulorum LGB, HGA

G jace-

jacebunt ex adversis partibus anguli BGH, eruntque inter se invicem proportionales. Erit insuper $\frac{\pi}{\omega} = \text{tang. LGS} = \frac{gf.\overline{k^2 - a^2}}{g^2 k^2 + f^2 a^2}$. Ac denique si fiat $a = k$, & rectangulum abeat in quadratum, erit tang. LGS $= 0$, & tang. LGA $= \frac{-1}{\text{tang. HGA}}$.

Corollarium II.

Si proponatur triangulum isoscele ACE, fig. 20., & sit $AG = a$, $AD = b$, $CD = e$, $AM = v$, & $MN = u = \frac{ev}{b}$; erit $\int \frac{1}{3} u^3 dv = \frac{e^3 v^4}{12 b^3}$, & $\int (a^2 - 2av + v^2) \frac{evdv}{b} = \frac{e}{b} \left(\frac{1}{2} a^2 v^2 - \frac{2}{3} a v^3 + \frac{1}{4} v^4\right)$: & cum juxta §. X. Introd. distantia centri gravitatis G a vertice sit $\frac{2}{3} b$, posito $a = \frac{2}{3} b$, & $v = b$, evadet summa omnis posterior $\frac{1}{36} e b^3$, ac fiet $\frac{\pi}{\omega} = \frac{gf(e^2 - \frac{1}{3} b^2)}{g^2 e^2 + \frac{1}{3} f^2 b^2}$, & $\frac{h}{l} = \frac{1}{\text{tang. LGB}} = \frac{-3ge^2}{fb^2} = \frac{-3e^2}{b^2 . \text{tang. HGA}}$, sive tang. HGA $= \frac{-3e^2}{b^2}$. tang. LGB. Quare cum in triangulo rectangulo sit $AC^2 = 4CD^2$, & $AD^2 = b^2 = 3CD^2 = 3e^2$, erit $\frac{\pi}{\omega} = 0$, & tang. HGA $=$ — tang. LGB. Si sit e^2 major, aut minor quam $\frac{1}{3} b^2$, & angulus CAE major, aut minor 60°, axis LG aut infra, aut supra rectam SG jacebit versus apicem trianguli A.

Corollarium III.

In parabola si altitudo omnis sit b, & parameter vocetur k, & sit $u^2 = kv$, erit $\int \frac{1}{3} u^3 dv = \frac{2}{15} k^{\frac{3}{2}} v^{\frac{5}{2}}$, & $\int (a^2 - 2av + v^2) u dv = k^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3} a^2 v^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{5} a v^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{7} v^{\frac{7}{2}}\right)$:

&

& cum ita in parabola sit $\frac{3}{5}b$ distantia centri gravitatis a vertice, posito $v = b$, & $\frac{3}{5}b = a$, fiet posterior summa $\frac{8}{175}k^{\frac{1}{2}}b^{\frac{7}{2}}$, ac terminis omnibus reductis eruetur $\frac{\pi}{\omega} = \frac{gf(\frac{1}{3}k - \frac{4}{35}b)}{\frac{1}{3}g^2k + \frac{4}{35}f^2b}$, & $\frac{l}{h} = -\frac{12b}{35k}.\frac{f}{g}$. Ita igitur quamdiu erit $k > \frac{12b}{35}$ angulus LGS tangentis positivæ supra rectam SG jacebit ex parte punctorum B, & H. Posito $k = \frac{12}{35}b$ rotationis axis cum recta SG congruet, & fiet $\frac{l}{h} = -\frac{f}{g}$: ac denique posito $k < \frac{12}{35}b$ rotationis axis jacebit infra eamdem rectam SG.

COROLLARIUM IV.

In ellipsi cum posito semiaxe majore a, minore b, sit $u = \frac{b}{a}\surd(2av - v^2)$, erit $\frac{1}{3}u^3 dv = \frac{b^3}{a^3}(2av - v^2)^{\frac{3}{2}}dv$. Est autem $\int(2av - v^2)^{\frac{3}{2}}dv = \frac{3}{4}a^2.\int(2av - v^2)dv - \frac{1}{4}(a - v)(2av - v^2)^{\frac{3}{2}}$. Cum itaque posito radio ad peripheriam ut $1:p$, factoque $v = 2a$, evanescat posterior terminus, & sit $\int(2av - v^2)dv = \frac{1}{4}pa^2$, erit $\int\frac{1}{3}u^3dv = \frac{1}{16}pb^3a$: & cum pariter sit $(a^2 - 2av + v^2)udv = ab\surd(2av - v^2)dv - \frac{b}{a}(2av - v^2)^{\frac{3}{2}}dv$, & penultimi termini summa sit $\frac{1}{4}pba^2$, ultimi vero $-\frac{3}{16}pba^2$, erit $\frac{\pi}{\omega} = \frac{gf.\overline{b^2 - a^2}}{g^2b^2 + f^2a^2}$, & $\frac{l}{h} = -\frac{a^2}{b^2}.\frac{f}{g}$: scilicet juxta Coroll. I. idem rotationis axis habebitur eadem vi ad datum angulum HGA ab axe AG impressa perimetro sive ellipseos, sive etiam rectanguli circumscripti.

PROBLEMA V.

Iisdem positis invenire velocitatem rotationis.

Sit $M\varphi$ vis, quæ plano $AB\alpha b$ normaliter imprimitur in puncto H, fig. 18., & posito ut supra $\omega = \text{cos. } LGS = \text{sin. } LGH$, sit $\omega . HG$ perpendiculum ex H demissum in rotationis axem Ll, & momentum vis impressæ sit $\omega . HG . M\varphi$. Sit etiam C velocitas rotationis in ea ab axe distantia, quæ accipitur pro unitate, & velocitas puncti cujuslibet alterius P sit $PR.C$, momentum vero $PR^2.C$. Juxta Theor. V. esse oportebit $\omega . HG . M\varphi = \int PR^2 . C . dM$, adeoque etiam $C = \frac{\omega . HG . M\varphi}{\int PR^2 . dM}$. At positis aliis omnibus antecedentis problematis denominationibus, & neglectis rectangulis xy, quæ in plano ad axem aliquem relato destruuntur signorum oppositione, est $PR^2 = h^2 y^2 + l^2 x^2$, & $\int PR^2 . dM = h^2 B + l^2 A$.

Insuper cum sit $\frac{h}{l} = -\frac{gA}{fB}$, erit $1 - h^2 = l^2 = 1 - \frac{g^2 l^2 A^2}{f^2 B^2}$,

atque inde eruetur $l^2 = \frac{f^2 B^2}{f^2 B^2 + g^2 A^2}$; & $h^2 = \frac{g^2 A^2}{f^2 B^2 + g^2 A^2}$.

ac pariter cum sit $\frac{\varpi}{\omega} = \frac{gf . \overline{A - B}}{g^2 A + f^2 B}$ simili calculo prodibit

$$\omega = \frac{g^2 A + f^2 B}{\sqrt{(\overline{g^2 A + f^2 B}^2 + g^2 f^2 . \overline{A - B}^2)}}.$$

Substitutis itaque terminis hisce omnibus habebitur

$$C = \frac{HG . M\varphi}{A . B} . \left(\frac{f^2 B^2 + g^2 A^2}{\sqrt{(\overline{g^2 A + f^2 B}^2 + g^2 f^2 . \overline{A - B}^2)}} \right):$$

& cum radicalis terminus sit $\sqrt{(g^4 A^2 + f^4 B^2 + g^2 f^2 . \overline{A^2 + B^2})}$, & sit etiam $g^2 f^2 . A^2 = g^2 . \overline{1 - g^2} . A^2$, & $g^2 f^2 . B^2 = f^2 . \overline{1 - f^2} . B^2$, fiet denique $C = \frac{HG . M\varphi}{A . B} . \sqrt{(f^2 B^2 + g^2 A^2)} = HG . M\varphi . \sqrt{\left(\frac{f^2}{A^2} + \frac{g^2}{B^2}\right)}$

$$= HG . M\varphi . \sqrt{\left(\frac{f^2}{\frac{4}{9}\overline{\int u^3 dv}^2} + \frac{g^2}{4(\int \overline{a^2 - 2av + v^2} . udv)^2} \right)}.$$

Co-

Corollarium I.

Si sint a, & k semilatera alicujus rectanguli, atque ut in priori corollario problematis antecedentis fiat $A = \frac{4}{3} k^3 a$, & $B = \frac{4}{3} k a^3$, ac sit $M = 4ka$, erit

$$C = 3\,HG.\varphi.\sqrt{\left(\frac{f^2}{k^4} + \frac{g^2}{a^4}\right)}:$$

& si fiat $k = a$, rectangulo in quadratum abeunte, erit $C = \frac{3\,HG.\varphi}{a^2}$.

Pariter in triangulo isoscele cum sit $A = \frac{1}{6} e^3 b$, $B = \frac{1}{18} e b^3$, $M = eb$, erit

$$C = 6\,HG.\varphi.\sqrt{\left(\frac{f^2}{e^4} + \frac{9g^2}{b^4}\right)}.$$

Corollarium II.

In parabola posito $A = \frac{4}{15} k^{\frac{3}{2}} b^{\frac{5}{2}}$, $B = \frac{16}{175} k^{\frac{1}{2}} b^{\frac{7}{2}}$, erit

$$C = \frac{5}{4} HG.M\varphi\sqrt{\left(\frac{9f^2}{k^3 b^3} + \frac{1225g^2}{16 k b^7}\right)}:$$

& cum altitudini b respondeat latitudo parabolæ $2\sqrt{kb}$, & sit area parabolæ $\frac{4}{3} k^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{2}}$, fiet etiam $C = 5\,HG.\varphi.\sqrt{\left(\frac{f^2}{k^2 b^2} + \frac{1225g^2}{144\,b^4}\right)}$.

Pariter cum in ellipsi sit $A = \frac{1}{8} p b^3 a$, $B = \frac{1}{8} p b a^3$, & area totius ellipseos sit $\frac{1}{2} p b a$, reductis ut antea terminis prodibit

$$C = 4\,HG.\varphi.\sqrt{\left(\frac{f^2}{b^4} + \frac{g^2}{a^4}\right)}.$$

Corollarium III.

Si fiat $b = a = HG$, & ellipsis in circumscriptum circulum degeneret, erit $f = 0$, $g = 1$, & fiet $C = \frac{4\varphi}{a}$. Quod directe etiam ex primis circularis motus notionibus potest colligi. Nam si circularis annulus circa diametrum aliquam volvi intelligatur, & veloci-

tas

tas in distantia 1 ab axe vocetur C, augeaturque, aut minuatur in ratione simplici distantiae, momentum erit ut velocitas eadem C ducta in quadratum sinus cujusque recti: & quia summa quadratorum omnium ex sinubus quibusque rectis per totam peripheriam pr radio r descriptam dimidia est summae quadratorum totidem maximorum r^2; si latitudo annuli sit dr, erit summa momentorum omnium annuli propositi $\frac{1}{2}pCr^3dr$, & in annulis omnibus acceptis ad centrum usque $\frac{1}{8}pCr^4$: quae summa cum exaequari debeat momento vis impressae $a.M\varphi$, posito $M=\frac{1}{2}pa^2$, & $a=r$, rursus eruetur $C=\frac{4\varphi}{a}$.

Problema V.

Data vi, quae laminae planae utcumque imprimitur, motum omnem rotationis determinare.

Resolvatur vis impressa in duas partes, quarum una $M\varphi$ perpendicularis sit plano laminae $ABab$ in puncto H, & rotationem gignat circa axem LG ut antea positum in plano ipso: altera $M\Delta$ in eodem plano dirigatur perpendiculariter ad radium HG, & rotationem aliquam gignat circa axem perpendicularem plano in centro G: nam quae alia vis juxta radium ipsum HG dirigetur non nisi projectionis motum punctis omnibus communem gignet. Si C ut antea sit velocitas, quae in distantia 1 ab axe LG gigni potest ob vim $M\varphi$, erit ut antea $C=HG.M\varphi.\surd\left(\frac{f^2}{A^2}+\frac{g^2}{B^2}\right)$:

& si c sit velocitas, quae ob vim $M\Delta$ in ea ab axe perpendiculari distantia potest gigni, quae pariter pro unitate accipiatur, & momentum particulae cujusque P circa hunc alterum axem rotantis sit $c.PG^2$, juxta Theor. V. fiet adhuc $HG.M\Delta=c.\int PG^2dM$, atque inde eruetur $c=\frac{HG.M\Delta}{\int PG^2.dM}=\frac{HG.M\Delta}{\int \overline{PF^2+FG^2}dM}=\frac{HG.M\Delta}{A+B}$.

Binis igitur viribus simul impressis, & juxta Theor. III. binis rotationis motibus in rotationem unicam circa axem TG compositis, si π ut antea sit sinus, & δ cosinus anguli TGL, fiet tang. $TGL=\frac{\pi}{\delta}=\frac{c}{C}=\frac{\Delta}{\varphi.\overline{A+B}.\surd\left(\frac{f^2+g^2}{A^2B^2}\right)}$.

De-

Denique rotationis hujus compositæ velocitas in distantia 1 ab axe TG erit $\surd(C^2+c^2) = HG.M.\surd\left(\varphi^2\left(\frac{f^2}{A^2}+\frac{g^2}{B^2}\right)+\frac{\Delta^2}{(A+B)^2}\right)$.

Corollarium I.

Si juxta corollarium secundum Theorematis tertii fiat cosinus anguli TGL ad radium ut velocitas HG.M $\varphi.\surd\left(\frac{f^2}{A^2}+\frac{g^2}{B^2}\right)$ circa axem LG concepta ad velocitatem compositæ rotationis, eademque methodo problematis præcedentis, ex alia problematis hujus formula $\frac{\pi}{\delta}=\frac{\Delta}{\varphi.\overline{A+B}.\surd\left(\frac{f^2}{A^2}+\frac{g^2}{B^2}\right)}$ eruatur $\delta=\frac{\varphi.\overline{A+B}.\surd\left(\frac{f^2}{A^2}+\frac{g^2}{B^2}\right)}{\surd\left(\varphi^2.\overline{A+B}^2.\left(\frac{f^2}{A^2}+\frac{g^2}{B^2}\right)+\Delta^2\right)}$

adhuc erit velocitas composita HG.M. $\surd\left(\varphi^2\left(\frac{f^2}{A^2}+\frac{g^2}{B^2}\right)+\frac{\Delta^2}{(A+B)^2}\right)$: quod satis erit semel indicasse ut pateat utramque methodum coincidere.

Corollarium II.

Iisdem etiam reassumptis præcedentium problematum substitutionibus in rectangulo fiet $\frac{\pi}{\delta}=\frac{\Delta}{\varphi.\overline{a^2+k^2}.\surd\left(\frac{f^2}{k^4}+\frac{g^2}{a^4}\right)}$:

atque erit rotationis compositæ velocitas
$3HG.\surd\left(\varphi^2\left(\frac{f^2}{k^4}+\frac{g^2}{a^4}\right)+\frac{\Delta^2}{(k^2+a^2)^2}\right)$:

& exæquatis rectanguli lateribus in quadrato fiet
$\frac{\pi}{\delta}=\frac{\Delta}{2\varphi}$, & velocitas $\frac{3HG}{a^2}.\surd\left(\varphi^2+\frac{1}{4}\Delta^2\right)$.

Corol-

COROLLARIUM III.

In triangulo isoscele simili ratione invenietur

$$\frac{\pi}{\delta} = \frac{\Delta}{\varphi . \overline{e^2 + \frac{1}{3} b^2} \surd \left(\frac{f^2}{e^4} + \frac{9 g^2}{b^4} \right)} :$$

in ellipsi vero erit $\frac{\pi}{\delta} = \frac{\Delta}{\varphi . \overline{a^2 + b^2} . \surd \left(\frac{f^2}{b^4} + \frac{g^2}{a^4} \right)}$.

& rotationis velocitas $4 \mathrm{HG} . \surd \left(\varphi^2 \left(\frac{f^2}{b^4} + \frac{g^2}{a^4} \right) + \frac{\Delta^2}{(a^2 + b^2)^2} \right)$:

& in priori casu, posito $e^2 = \frac{1}{3} b^2$, in posteriori vero, posito $a^2 = b$, scilicet in triangulo æquilatero, & in circulo fiet æque ac in quadrato $\frac{\pi}{\delta} = \frac{\Delta}{2 \varphi}$.

COROLLARIUM IV.

In posteriori etiam hoc casu cum sit $\mathrm{HG} = a$, $\mathrm{M} = \frac{1}{2} p a^2$, $\mathrm{A} = \mathrm{B} = \frac{1}{8} p a^4$, ex antecedentibus velocitatum formulis eruetur $\mathrm{C} = \frac{4 \varphi}{a}$, & $c = \frac{2 \Delta}{a}$: scilicet eadem vi in plano circuli impressa duplo minor angularis velocitas habebitur circa axem plano ipsi perpendiculariter in centro eductum, quam si vis esset perpendicularis plano, & rotationis motus fieret circa aliquam circuli diametrum. Quod etiam ex Coroll. III. præcedentis problematis facile colligitur. Cum enim primo esse debeat $\mathrm{C} = \frac{4 \varphi}{a}$, & sit $p c r^3 d r$ momentum annuli, radio r, & latitudine $d r$ descripti, & velocitate c moti circa axem perpendiculariter in centro erectum; erit $\frac{1}{4} p c a^4$ summa momentorum omnium totius circuli radio a descripti: & cum momentum vis impressæ sit $a . \mathrm{M} \Delta = \frac{1}{2} p a^4 c$, rursus fiet $c = \frac{2 \Delta}{a}$.

PRO-

PROBLEMA VI.

Si corpori cuilibet rotundo imprimatur vis aliqua, quæ perpendicularis ſit plano per axem figuræ ducto, invenire axem rotationis.

Gignatur ſolidum revolutione figuræ planæ BAa circa rectam Aa, fig. 21., & ſit PK perpendiculum ex puncto quocumque P demiſſum in planum BAb, atque ex K in figuræ axes AG, BG ductis perpendiculis KM, KF, & KR in axem rotationis LG, junctaque PR fiat PK $= z$, KF $= y$, FG $= x$, & manentibus aliis denominationibus Probl. IV. ſit KR $= hy - lx$, & RG $= ly + hx$. Si vis impreſſa perpendicularis eſſet plano BAa, juxta Coroll. I., & III. Probl. II., rotationis axis jaceret in plano ipſo, atque eſſet tang. LGS $= \frac{\pi}{\omega} = \frac{\int KR.RG.dM}{\int PR^2.dM}$. Eſt autem PR^2 $=$ PK^2 $+$ KR^2: atque inſuper ſi ſolidum ſit rotundum rectangula omnia xy in toto corpore debent deſtrui. Erit itaque in hoc caſu

$$\frac{\pi}{\omega} = \frac{gl + hf}{hg - lf} = \frac{hl.\int \overline{y^2 - x^2}.dM}{\int (z^2 + h^2y^2 + l^2x^2).dM}.$$

Patet autem in ſectionibus omnibus circularibus perpendiculariter ad axem AG ductis ſummas omnium x^2, z^2 æquari oportere. Quod ſi igitur fiat $\int z^2 dM = \int x^2 dM = A$, & $\int y^2 dM = B$, erit

$$\frac{\pi}{\omega} = \frac{gl + hf}{hg - lf} = \frac{hl.\overline{B - A}}{\overline{l^2 + 1}.A + h^2B}.$$

Hac autem data æquatione, multiplicatiſque, ac reductis terminis omnibus facili demum calculo eruetur $\frac{h}{l} = \frac{-2gA}{f.\overline{A + B}}$. Quod ſi igitur pro expreſſione tangentis anguli LGS ſcribamus $\frac{B - A}{\frac{2lA}{h} + \frac{h}{l}.\overline{A + B}}$, & loco $\frac{h}{l}$ valorem ultimo inventum ſubſtituamus, ſimiliter reductis terminis habebimus

$$\frac{\pi}{\omega} = \frac{gf.\overline{A - B}}{\overline{1 + g^2}.A + f^2B}.$$

COROLLARIUM I.

Quoniam, posito radio ad peripheriam ut $1:p$, summa quadratorum omnium ex sinubus, aut cosinubus in circulo radii r est $\frac{1}{2}pr^2$, & posito r variabili est summa hujusmodi in tota circulari area $\frac{1}{8}pr^4$, adeoque posita $u = $ MN in tota sectione circulari perpendiculariter ad AG sectæ in puncto M summa ommium z^2, aut x^2 est $\frac{1}{8}pu^4$; si fiat insuper AM $= v$, erit in formulis præcedentibus $A = \frac{1}{8}p.\int u^4 dv$. Pariter cum sit tota sectionis ejusdem area $\frac{1}{2}pu^2$, & summa quantitatum omnium y^2, quæ in sectione quavis eædem constanter manent, sit $\frac{1}{2}pu^2y^2$, erit $B = \frac{1}{2}p\int(a^2 - 2av + v^2)u^2dv$.

COROLLARIUM II.

In cono cum, posita altitudine b, & radio baseos e, sit $u = \frac{ev}{b}$, erit $\int u^4 dv = \frac{e^4v^5}{5b^4}$, & $A = \frac{1}{40}pe^4b$. Erit etiam $\int(a^2 - 2av + v^2)\frac{e^2v^2dv}{b^2} = \frac{a^2e^2v^3}{3b^2} - \frac{ae^2v^4}{2b^2} + \frac{e^2v^5}{5b^2}$, ac posito $v = b$, $a = \frac{3}{4}b$, collectisque terminis fiet $B = \frac{1}{160}pe^2b^3$. Ita igitur ex priori formula eruetur

$$\frac{h}{l} = \frac{-2ge^2}{f(e^2+\frac{1}{4}b^2)} = -\frac{2g}{f}\cdot\frac{1}{1+\frac{b^2}{4e^2}}.$$

COROLLARIUM III.

In cilindro altitudinis $2a$, & radii baseos b erit $A = \frac{1}{4}pb^4a$, & $\int(a^2 - 2av + v^2)b^2dv = b^2(a^2v - av^2 + \frac{1}{3}v^3)$, substituen-

tuendoque $2a$ loco v fiet $B = \frac{1}{3} p b^2 a^3$: atque ita eruetur $\frac{h}{l} = -\frac{g b^2}{f(\frac{1}{2} b^2 + \frac{2}{3} a^2)}$: & si sit $a = b$, hoc est si baseos diameter exæquet altitudinem cilindri, erit $\frac{h}{l} =$ tang. LGA $= -\frac{6}{7}$. tang. HGB.

COROLLARIUM IV.

In paraboloide cum posito $u^2 = kv$ sit $\int u^4 dv = \frac{1}{3} k^2 v^3$, fiet $A = \frac{1}{24} p k^2 b^3$: & cum sit $\int (a^2 - 2av + v^2) u^2 dv = \frac{1}{2} a^2 k v^2 - \frac{2}{3} a k v^3 + \frac{1}{4} k v^4$, cumque insuper distantia centri gravitatis a vertice, juxta §. X. Introd., exæquet duas partes tertias totius altitudinis, posito $v = b$, & $a = \frac{2}{3} b$, eruetur $B = \frac{1}{72} k b^4$, ac fiet

$$\frac{h}{l} = \frac{-2gk}{f.(k + \frac{1}{3} b)}.$$

COROLLARIUM V.

In sphæroide vero cum sit $u^4 = \frac{b^4}{a^4}(4a^2 v^2 - 4a v^3 + v^4)$, summis de more acceptis fiet $A = \frac{2}{15} p a b^4$: & cum sit $\int (a^2 - 2av + v^2)(2av - v^2) dv = (a^3 v^2 - \frac{5}{3} a^2 v^3 + a v^4 - \frac{1}{5} v^5)$, posito $v = 2a$, & collectis simul fractionibus fiet $B = \frac{2}{15} p a^3 b^2$, atque his valoribus in eadem formula substitutis erit

$$\frac{h}{l} = \frac{-2 g b^2}{f(a^2 + b^2)}.$$

PROBLEMA VII.

Data vi, quæ corpori rotundo utcumque imprimitur, rotationis axem determinare.

Sit M $\circ$ vis perpendicularis plano BA a in puncto H, & rotationis velocitas, quæ ob eamdem vim circa axem LG posset concipi, vocetur C. Sit etiam M $\triangle$ vis jacens in plano ipso, & radio HG

perpendicularis in puncto eodem H, sitque insuper c velocitas rotationis inde ortæ circa axem plano BAb perpendicularem in centro G. Eadem, qua in Probl. IV., & V. methodo eruetur

$C = \frac{\omega . HG . M\varphi}{\int PR^2 . dM}$, & $c = \frac{HG . M\Delta}{\int KG^2 . dM}$: & divisione facta, juxta Theor. III.

prodibit tangens deviationis axis TG rotationis compositæ ab axe LG

$$\frac{\pi}{\delta} = \frac{c}{C} = \frac{\Delta}{\omega\varphi} . \frac{\int PR^2 . dM}{\int KG^2 . dM} .$$

Est autem $PR^2 = h^2y^2 + l^2x^2 + z^2$, $\int PR^2 . dM = \overline{1 + l^2} . A + h^2 B$, & $\int KG^2 . dM = A + B$. Insuper posito $\frac{h}{l} = \frac{-2gA}{f.\overline{A+B}}$, & $\frac{\pi}{\omega} = \frac{gf.\overline{A-B}}{\overline{1+g^2}.A + f^2 B}$ fit

$$l^2 = \frac{f^2 . \overline{A + B}^2}{f^2 . \overline{A + B}^2 + 4g^2 A^2}$$

$$h^2 = \frac{4g^2 A^2}{f^2 . \overline{A + B}^2 + 4g^2 A^2}$$

$$\frac{1}{\omega^2} = 1 + \frac{g^2 f^2 . \overline{A - B}^2}{(\overline{1 + g^2} . A + f^2 B)^2} .$$

Factis itaque hisce omnibus substitutionibus prodibit

$$\frac{\pi}{\delta} = \frac{\Delta}{\varphi . \overline{A+B}} \left(A + \frac{f^2 . \overline{A+B}^2 . A + 4g^2 A^2 B}{f^2 . \overline{A+B}^2 + 4g^2 A^2} \right) \sqrt{\left(\frac{(\overline{1+g^2} . A + f^2 B)^2 + g^2 f^2 . \overline{A-B}^2}{\overline{1+g^2} . A + f^2 B} \right)}$$

$$= \frac{\Delta}{\varphi . \overline{A+B}} \left(\frac{2f^2 . A . \overline{A+B}^2 + 4g^2 . A^2 . \overline{A+B}}{\sqrt{(f^2 . \overline{A+B}^2 + 4g^2 A^2)} (\overline{1+g^2} . A + f^2 B)} \right)$$

$$= \frac{\Delta . 2A}{\varphi . \sqrt{(f^2 . \overline{A+B}^2 + 4g^2 A^2)}} .$$

COROLLARIUM.

Ita si sphærois aliqua proponeretur semiaxibus a, & b descripta, atque ut antea esset $A = \frac{2}{15} p a b^4$, $B = \frac{2}{15} p a^3 b^2$, reductis terminis prodibit

$$\frac{\pi}{\delta} = \frac{2b^2 \Delta}{\varphi \sqrt{(f^2 . \overline{a^2 + b^2}^2 + 4g^2 b^4)}} .$$

Simili

Simili modo rotationis axis in solidis aliis rotundis determinari poterit, ac similibus substitutionibus, reductionibusque, quibus in posteriori æquatione hujus problematis usi sumus, posito semper $f^2 + g^2 = 1$, definiri etiam poterit rotationis totius compositæ velocitas, & ad minimos terminos deduci.

SCHOLION.

Eadem ratione, ac methodo rotationis velocitas supputari, atque axis positio determinari poterit in singulis poliedris, ac solidis regularibus, atque iis etiam omnibus corporibus, quæ plano aliquo BA a per gravitatis centrum transeunte ita secari possunt, ut, si vis impressa dirigatur in plano ipso rotationis axis sit plano perpendicularis, &, si vis perpendicularis sit plano rotationis, axis in plano eodem jaceat. Scilicet ex formulis primi, & secundi problematis in casu utroque eruetur axis positio: atque ex theoremate quarto, quo momentorum quantitatem in percussione corporum variari non posse ostendimus, rotationis utriusque velocitas colligetur: ac demum juxta theorema tertium binos rotationis motus componendo invenietur axis, & velocitas rotationis quotiescumque vis aliqua oblique ad planum propositum dirigatur. Neque ita minus accuratæ, ac generales erunt solutiones problematum quam quibus apud alios authores oscillationis centrum in planis quibuscumque, ac solidis rotatione genitis determinatur. Ut eadem methodus ad alia quælibet corpora irregularia traducatur alio insuper theoremate opus est, quod D. Segnerus in specimine theoriæ turbinum Halæ edito proposuit anno 1755, & quod deinde authores alii variis demonstrationibus confirmarunt: quod scilicet in unoquoque corpore saltem tres axes assignari possint se ad angulum rectum secantes, circa quos ubi semel rotatio incœperit, viribus centrifugis se se invicem compensantibus, invariabiliter continuari possit. Primam theorematis singularis demonstrationem protulit Albertus Eulerus in dissertatione, quæ præmium Parisiensis Academiæ anno 1760 retulit: alias deinde addiderunt Alembertius To. IV. Opuscul., Leonardus Eulerus Cap. V. de motu corporum rigidorum, & Lodovicus de la Grange in dissertatione, quæ præmium anni 1764 obtinuit. Id ipsum vero ex prioribus rotatorii motus notionibus facile potest colligi.

CA-

CAPUT QUARTUM.

DE AXIBUS PRINCIPALIBUS ROTATIONIS.

THEOREMA VII.

Axes, circa quos corpus invariabiliter rotari poteſt, per gravitatis centrum tranſire: & binis quibuſque axibus invariabilibus ſe ad angulum rectum ſecantibus in eodem centro ſemper reſpondere axem tertium, pariter invariabilem, tranſeuntem per idem centrum, & plano duorum axium normalem.

Volvatur corpus circa axem aliquem RG, fig. *9.*, & in planum RGC ex puncto quocumque P demittatur perpendiculum PQ, & ſit ut antea $PQ = Z$, $QR = Y$, $RG = X$, & elementum maſſæ totius corporis ſit dM. Vis centrifuga puncti ejuſdem P, qua ſcilicet, concepto rotationis motu, nitetur directe recedere ab axe RG, atque a centro R circuli deſcripti, proportionalis erit diſtantiæ PR, reſolveturque in duas alias ſecundum RQ, QP, atque erit $Z.dM$ vis perpendicularis plano RGC, & vis plano eidem parallela in puncto P erit $Y.dM$. Erit etiam $XZ.dM$ momentum particulæ P ad corpus inclinandum circa rectam CO jacentem in plano RGC, & perpendicularem axi RG: & $XY.dM$ erit momentum, quo corpus a viribus centrifugis inclinabitur circa axem tertium duobus RG, GO perpendicularem in puncto G. Ut ergo corpus circa axem aliquem RG invariabiliter rotari poſſit quin continuato motu novus emergat axis rotationis, primo ſumma omnium virium centrifugarum hinc inde ab axe æquari, & ſimul deſtrui debet, ſive eſſe debet $\int Z.dM = 0$, & $\int Y.dM = 0$: quod juxta §. IX. Introd. eſſe nequit niſi rotationis axis RG tranſeat per centrum gravitatis G. Deinde eſſe debet $\int ZX.dM = 0$, $\int YX.dM = 0$, ne corpus inclinari poſſit aut circa axem GC, aut circa axem tertium plano RGC perpendicularem in centro G. Simili modo, ut totum corpus circa axem GC invariabiliter poſſit revolvi, eſſe oportebit $\int ZY.dM = 0$, $\int YX.dM$. Quod ſi inſuper intelligamus rotationem totius corporis incipere circa axem tertium plano RGC perpen-

pen-

pendicularem in centro G, & vis centrifuga particulæ cujusque P resolvatur in binas alias Y, X perpendicularem unam, & alteram parallelam plano, quod per RG, & tertium hunc axem transit; erit $XZ.dM$ momentum particulæ ejusdem ad corpus inclinandum circa axem GC: eritque $ZY.dM$ momentum, quo corpus inclinari incipiet circa RG. Itaque si circa axem RG invariabiliter corpus rotari possit, & una ex binis æquationibus, quæ hanc conditionem exprimunt, sit $\int XZ.dM = 0$: ac pariter si GC sit axis alius invariabilis, & sit propterea $\int ZY.dM = 0$; corpus circa axem tertium duobus prioribus normalem in centro G invariabiliter revolvi poterit.

Corollarium I.

Si proponatur figura quæcumque plana, & fiat $Z = 0$, erit etiam $\int XZ.dM = 0$, & $\int YZ.dM = 0$, adeoque ex centro gravitatis educta recta, quæ sit figuræ ipsi perpendicularis, unus semper axis habebitur, circa quem, ubi semel rotatio incœperit, eadem uniformiter poterit continuari. Quod si insuper per centrum ipsum, atque in plano propositæ figuræ ita ducatur recta ut sit $\int YX.dM = 0$, quæque propterea ob momentorum æqualitatem, sit axis alius invariabilis, tertius rotationis axis pariter invariabilis determinari poterit ex gravitatis centro educendo rectam, quæ sit plano duorum priorum axium perpendicularis. Et quia si QR, sive Y sumatur constans, & loco dM accipiatur dX, in tota recta axi RG parallela, summa omnium $XY.dM$ est $\frac{1}{2}X^2Y$, problema trium axium principalium in figura qualibet plana eo reducetur ut in plano ipso, & per gravitatis centrum ducatur recta, cujus respectu sit $\int X^2Y.dY = 0$.

Corollarium II.

Generatim vero si figura plana axem aliquem habeat, qui coordinatas omnes bisecet ad rectos angulos, quique propterea cum momenta hinc inde relinquat inter se æqualia invariabilis rotationis axis esse possit, invariabilis alius axis in plano figuræ, & per centrum gravitatis ductus erit priori axi perpendicularis. In parallelogrammo autem quovis cum binæ rectæ per centrum gravitatis ductæ, & ad latus alterutrum parallelæ rotationis momenta hinc inde æqualia relinquant, bini alii invariabiles axes habebuntur ex centro ipso binas alias rectas educendo, quæ sint prioribus perpendiculares, atque in plano eodem jaceant. In solidis revolutione planæ figuræ genitis circa ipsum revolutionis axem uniformis rotatio haberi poterit:

&

& diametri omnes in circulo per gravitatis centrum normaliter ad axem eumdem secto, ob æqualitatem momentorum, quæ hinc inde relinquentur, erunt totidem alii invariabiles axes rotationis: ut in sphæroide diametri omnes æquatoris, & in sphæra diametri omnino omnes.

Corollarium III.

In corporibus etiam quibuscumque cum pro invariabili rotationis axe esse debeat $\int XZ.dM = 0$, & $\int YX.dM = 0$, & cum juxta Coroll. IV., & V. Lemmatis antecedentis duabus hisce conditionibus positis fiat $\overline{Z^2 + Y^2}.dM = 0$, atque hoc dato cum quantitas $\int \overline{Z^2 + Y^2}$, seu quadratum distantiæ puncti cujuslibet propositi ab axe motus exprimat etiam productum simplicis distantiæ, & vis centrifugæ; manifestum est invariabilem quemlibet rotationis axem eum esse circa quem motu incœpto momenta virium centrifugarum, seu totius motus rotatorii, maximum, vel minimum valorem habeant: & si in corpore aliquo axes hujusmodi invariabiles plures sint, plures etiam maximi, aut minimi rotatorii momenti casus in eodem corpore esse oportebit.

Corollarium IV.

Si vires centrifugæ non sint æquales inter se, nec hinc inde ab axe rotationis compensent se se invicem, ac destruant, hoc est si rotationis axis non transeat per centrum gravitatis, motus omnis juxta Theorema primum in binos alios resolvi poterit projectionis, & rotationis circa novum axem, qui transeat per centrum gravitatis. Quod si sit $\int Z.dM = 0$, $\int Y.dM = 0$, non autem $\int XZ.dM = 0$, $\int YX.dM = 0$, hoc est si vires quidem centrifugæ æquales sint inter se, sed tamen momenta virium sint inæqualia, nova totius corporis rotatio orietur, eaque fiet circa axem alium transeuntem per centrum gravitatis, & priori axi perpendicularem. Data vero differentia utriusque momenti virium centrifugarum hinc inde ab axe motus, eadem methodo, quam in Coroll. V. Theor. IV. indicavimus, determinari poterit velocitas novæ rotationis, quæ ob hanc ipsam momentorum inæqualitatem inducetur.

Corollarium V.

Binæ autem rotationes hujusmodi, & quæ primum a viribus impressi, gignitur circa axem datum, & quæ deinde ob inæqualitatem

tem momentorum adjicitur circa axem alium in centro gravitatis occurrentem priori ad rectos angulos, juxta Theor. IV., rotationem unicam component circa axem tertium jacentem in plano priorum axium, & qui ab utroque iis angulis deviabit, quorum sinus velocitatibus angularibus circa binos eosdem axes antea conceptis erunt reciproce proportionales. Et si neque circa axem hunc tertium composita rotatione centrifugarum virium momenta æqualia sint, nova adhuc rotatio habebitur, eaque simili modo semper cum præcedentibus componi, & motus totius corporis ad tempus quodcumque datum assignari poterit.

PROBLEMA VIII.

Si circa axem aliquem datum impressis viribus quibuscumque quodcumque corpus rotari incipiat, & centrifugarum virium momenta se se invicem non destruant, variationes motus inde ortas definire.

Sit in fig. 21. axis solidi AGa, & rotationis axis LGl, ductaque ut antea BG perpendiculari ad AG, sit h sinus, & l cosinus anguli LGA, ac fiat pariter $PK = z$, $KF = y$, $FG = x$,

$KR = Y = hy - lx$, $RG = X = ly + hx$, & sit propterea

$XY.dM = hl.\overline{y^2 - x^2} + \overline{h^2 - l^2}.xy.$

Sit insuper ds arcus elemento temporis dt circa axem rotationis LGl, & in illa ab axe distantia descriptus, quæ unitate exprimatur, ac sit rotationis primo impressæ velocitas $\frac{ds}{dt}$. Quia velocitas rotationis est ad velocitatem, quæ dato tempore gigni posset ob vim centripetam, vel centrifugam, ut tangens exigui arcus circularis ad duplum sinum versum, sive ut radius ad arcum ipsum; in distantia illa ab axe, quæ exprimitur unitate, erit vis omnis centrifuga $\frac{ds^2}{dt}$, & in puncto quocumque P erit vis axi AG parallela $Y.dM.\frac{ds^2}{dt}$, & momentum ejusdem vis ad corpus omne volvendum circa axem alium plano LAG perpendicularem in centro G erit $XY.dM.\frac{ds^2}{dt}$. Jam vero si totum corpus circa axem hunc ipsum

velocitate c ad distantiam ι revolvatur, erit rotationis momentum $c.\overline{\int y^2.dM + \int x^2.dM}$. Momentis itaque juxta Theor. V. exæquatis, & posito ut antea $\int x^2.dM = A$, $\int y^2.dM = B$, $\int xy.dM = D$, erit

$$c = \left(\frac{hl.\overline{B-A} + \overline{h^2-l^2}.D}{A+B}\right).\frac{ds^2}{ds}:$$

& si alterius hujus rotationis motus dirigatur a puncto l in L, prior autem sic fiat ut punctum A supra planum tabulæ assurgat dum inferius deprimitur punctum a; binis rotationis motus se destruent in recta TG, atque in plano alio per LG perpendiculariter ad AGL erecto, ac velocitatibus divisis juxta Theor. IV. fiet denique

$$\text{tang. LGT} = \left(\frac{hl.\overline{B-A} + \overline{h^2-l^2}.D}{A+B}\right).ds.$$

Corollarium I.

Si proponatur figura plana, quæ diametro aliqua AG a sit prædita, aut solidum revolutione planæ cujuslibet figuræ circa axem quemcumque genitum, & sit $\int xy.dM = D = 0$, erit $hl.\frac{B-A}{B+A}.ds$ tangens deviationis axis, circa quem rotatio omnis componitur. Atque ita si proponatur sphærois, & juxta Coroll. V. Probl. VI. sit $A = \frac{2}{15}pb^4a$, & $B = \frac{2}{15}pb^2a^3$, erit tangens anguli LGT $= hl.\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.ds$, dataque proportione semiaxium augebitur, aut minuetur in ratione composita sinus, & cosinus anguli LGB.

Corollarium II.

Si sphærois utrimque ad polum B sit compressa, & sit AG $= a$, BG $= b$, & fiat propterea $b < a$, cum directio totius vis centrifugæ tendat ex R in K motus etiam rotationis inde ortus dirigetur ex puncto A in L. At si fiat $b > a$, & sphærois ad polos sit oblonga, rotationis motus, qui ex inæqualitate momentorum omnium exsurget, contraria directione tendet ex B in A, & si primæ rotationis directio intelligatur eadem, quæ antea, bini motus ex adversa parte se destruent, & angulus LGT deviationis axis compositæ rotationis infra tabulæ planum jacebit. Utroque autem in casu cum

axis

axis TG maneat in plano normaliter ad LGA per axem LG ducto, rotationis polus inæqualitate momentorum a polo figuræ recedet longius.

Corollarium III.

Et qua ratione axis LG in TG abit, viribus centrifugis continue agentibus, & continuato motu totius corporis, novus rotationis axis ab axe figuræ BG adhuc recedet longius, dataque proportione semiaxium sphæroidis, & rotationis prioris velocitate, deviatio omnis ad tempus quodcumque datum ex formulis præcedentibus erui poterit. Eadem methodus exemplis aliis aptabitur corporum quorumcumque: & si in corpore aliquo momenta virium centrifugarum nec parallele, nec perpendiculariter ad planum LAG exercita sese destruant, & non sit $\int XZ.dM = o$, simili modo velocitas novæ rotationis circa axem AGa genitæ supputari, & rotationes omnes componi, & axis locus ad tempus quodcumque datum assignari poterit.

Theorema VIII.

In unoquoque corpore saltem tres esse axes per gravitatis centrum transeuntes, & sibi invicem perpendiculares, circa quos ubi semel rotationis motus incœperit, invariabiliter semper continuabitur.

Per Theor. VII. ut circa axem aliquem invariabiliter continuari possit rotatio, momenta virium centrifugarum, & parallele, & perpendiculariter ad planum quodvis traductum per axem ipsum exercita debent se invicem destruere: & per Coroll. V. Lemmatis præmissi, & Coroll. II. Theor. VII. momenta omnia earumdem virium exercita directe in axem habere debent valorem maximum, vel minimum. Jam vero si, quod in sphæra habet locum, circa diametros omnes per gravitatis centrum traductos æqualia undique habeantur momenta virium centrifugarum, manifestum est omnes diametros esse totidem axes rotationum invariabilium: & si momenta eadem undique circa diametros omnes non sint æqualia inter se, manifestum est pariter unum saltem in toto corpore axem esse oportere, circa quem momentorum summa valorem maximum, vel minimum obtineat. Sit axis hujusmodi BGb, fig. 21., ac propterea in planis omnibus ABab per axem ipsum traductis, juxta Theor. VII., sit $\int PK.FG.dM = o$, & $\int KF.FG.dM$. Ex centro G erecta GA ad BG perpendiculari, & plano ABab circa BGb revoluto per totum corpus, manifestum est insuper alicubi esse oportere $\int PK.KF.dM = o$. Nam si in dato plani loco ex una ipsius facie summa momentorum

 om-

omnium hujusmodi major sit quam ex altera, & deinde planum circa BGb revolvi pergat, antequam per gradus omnes in positionem adversam transeat, & ex priori eadem facie non major jam sed minor summa momentorum respondeat, alicubi ex facie utraque habebuntur momenta æqualia, iisque se se invicem oppositione signi destruentibus erit in toto corpore $\int PK.KF.dM = o$. At si simul sit $\int PK.KF.dM = o$, & $\int KF.FG.dM = o$, axis etiam AGa rotationi invariabili inserviet: & per Theor. VI. ad AG, & BG ex centro G educendo perpendicularem lineam, invariabilis tertius rotationis axis habebitur. Patet igitur propositum.

Corollarium I.

Si sint AG, BG bini axes invariabiles se ad angulum rectum secantes, iisdemque positis denominationibus, quæ antea, sit $\int zx.dM = o$, $\int yx.dM = o$, $\int zy.dM = o$, statuamusque in plano ipso ABab esse axem alium invariabilem LG, fieri insuper oportebit $\int z.RG.dM = o$, & $\int KR.RG.dM = o$: & quia si h sit sinus, & l cosinus anguli LGA, esse debet ut antea KR $= hy - lx$, & RG $= ly + hx$, binæ aliæ æquationes habebuntur

$$\int \overline{lzy + hzx}.dM = o$$

$$\int \left(hl.\overline{y^2 - x^2} + \overline{h^2 - l^2}.xy\right).dM = o.$$

Corollarium II.

Jam vero si in binis hisce æquationibus posterioribus priores tres combinentur supererit $\int hl.\overline{y^2 - x^2}.dM = o$, sive $\int y^2.dM = \int x^2.dM$, & quantitates h, & l, cum maneant indeterminatæ, valorem quemcumque alium habere poterunt: adeoque si in plano aliquo per gravitatis centrum traducto plusquam bini sint axes invariabiles rotationis, rectæ omnes in eodem plano per idem centrum traductæ erunt totidem axes pariter invariabiles. Datis tribus axibus invariabilibus, & quarto insuper LG patet ex Theor. VII. quintum determinari educendo ex G ad LG perpendicularem in plano AGB.

Corollarium III.

Si quartus aliquis axis invariabilis jaceat extra tria plana, quas bini axes AG, BG inter se, & cum tertio axe constituunt ad AGB perpendiculariter erecto in centro G, ad plana omnia

primi,

primi, & quarti, secundi, & quarti, tertii, & quarti pariter axis perpendiculares alias similiter educendo septem jam invariabiles rotationis axes habebuntur: & quatuor priores axes ad tres alios referendo, & perpendiculis aliis eductis duodecim novi axes determinari poterunt, eodemque ordine ulterius ad alios rursus axes licebit progredi.

PROBLEMA IX.

Si in corpore aliquo unus axis innotescat, circa quem invariabilis esse possit rotatio, binos alios axes perpendiculares determinare.

Cum in corpore quovis proposito, etiam irregulari, unus saltem axis facile innotescat, circa quem momentis virium centrifugarum ad maximum vel minimum valorem assurgentibus invariabiliter continuari possit rotatio, statuamus axem hujusmodi esse SG, fig. 14. Juxta Theor. VII., plano quocumque SGH per axem SG traducto, & positis omnibus præmissi lemmatis denominationibus erit $\int KV.VG.dM = \int xy.dM = D = 0$, $\int PK.VG.dM = \int xz.dM = E = 0$. Quoniam bini axes alii debent esse axi SG perpendiculares, fiat $\omega = \text{cos}.LGS = \text{sin}.LGH = 0$, & $\pi = \text{cos}.LGH = 1$, atque ita LG coincidat cum HG. Tum ut in plano TGL, sive TGH sit axis alius invariabilis TG, debebit esse $\int PQ.RG.dM = \int XY.dM = 0$, & $\int QR.RG.dM = \int XZ.dM = 0$. Jam vero si in tertia formula Coroll. II. ejusdem Lemmatis fiat $\omega = 0$, $D = 0$, $E = 0$, evanescent termini omnes per A, B, & F ducti: & si in secunda formula substitutiones eædem fiant, supererunt termini

$$-\pi\delta B + \pi\delta C + \overline{\delta^2 - \pi^2}.F = \int XZ.dM = 0:$$

atque inde æquationes aliæ ordine eruentur

$$\frac{\delta}{\pi} - \frac{\pi}{\delta} = \frac{B-C}{F}$$

$$\frac{\pi^2}{\delta^2} + \frac{\pi}{\delta}.\frac{B-C}{F} = 1$$

$$\frac{\pi}{\delta} = \text{tang}.TGL = \text{tang}.TGH = \frac{C - B \pm \sqrt{(\overline{B-C}^2 + 4F^2)}}{2F}.$$

Itaque coordinatis corporis ad planum SGH relatis, datisque summis omnibus B, C, F, valores bini habebuntur, qui binos invariabiles axes TG ad priorem axem SG normales, & binos angulos TGH definient. Co-

COROLLARIUM I.

Si bini hujusmodi valores tangentis anguli TGH ducantur in se invicem fiet

$$\left(\frac{C-B+\sqrt{(\overline{B-C}^2+4F^2)}}{2F}\right)\left(\frac{C-B-\sqrt{(\overline{B-C}^2+4F^2)}}{2F}\right)=-1:$$

quod esse nequit, nisi tangens unius anguli æqualis sit cotangenti anguli alterius, hoc est nisi bini axes hujusmodi, in plano ad SG normali, recto pariter angulo a se invicem distent. Rursus igitur constat in unoquoque corpore saltem tres esse axes invariabiles per gravitatis centrum orthogonaliter transeuntes.

COROLLARIUM II.

Pariter in unoquoque corpore saltem tres erunt axes sibi invicem in centro perpendiculares, circa quos particularum omnium rotantium momentum erit vel maximum, vel minimum. Et quidem respectu axis SG, posito $\varpi=0$, & $\pi=0$, in priori formula corollarii mox indicati fiet rotationis totius momentum $\int \overline{Z^2+Y^2}.dM=B+C$: & si sit alter axis HG, posito $\omega=0$, $\pi=0$, momentum erit $A+C$: & respectu axis tertii UG, qui plano SGH insistat perpendiculariter in centro G, erit momentum $A+B$: dataque idcirco æquatione corporis, momenta particularum omnium circa aliquem invariabilem axem rotantium determinari facile poterunt.

COROLLARIUM III.

Si dato axe invariabili SG coincidant rectæ HG, LG, & præter binos axes SG, HG, in plano HGT normaliter ad SG ducto sit axis alius invariabilis TG, & coordinatis corporis ad planum SGH relatis respectu binorum axium SG, HG, sit $D=0$, $E=0$, $F=0$, fiet tang. TGL = tang. TGH $=\frac{C-B}{F}\pm\frac{B\mp C}{F}$.

Accepto itaque inferiori signo erit tang. TGH $=\frac{2C-2B}{0}$, & angulus TGH fiet rectus, ut antea dictum est. Erit vero etiam alter tangentis ipsius valor $\frac{0}{0}$: quæ cum sit quantitas indeterminata,

patet

patet rursus quod si in aliquo plano per gravitatis centrum traducto plusquam bini sint axes invariabiles rotationis, rectæ omnes in eodem plano per idem centrum traductæ erunt totidem axes pariter invariabiles.

Scholion.

Singulare theorema trium saltem axium invariabilium, quod modo ex prioribus rotatorii motus formulis consequi animadvertimus, authores alii aliis rationibus demonstrarunt. Leonardus Eulerus in Probl. XXVII. de motu corporum rigidorum assumpta eadem, quæ supra, expressione quantitatis $\int \overline{Z^2 + Y^2} . dM$, & differentialibus bis acceptis, ac nihilo exæquatis, sinum π primo, ac deinde sinum ϖ pro variabili accipiendo, in æquationem cubicam incidit, cujus cum una saltem realis debeat esse radix, atque aliam insuper radicem realem esse oportere ex iisdem formulis præcedentis problematis colligatur, tres omnes semper radices reales esse ostendit, & tres semper esse axes, circa quos ubi semel rotatio incœperit, inæqualitate virium centrifugarum nunquam variari possit. Radicatus Coconati Comes æquatione aliter disposita ad eamdem conclusionem facile pervenit, indicavitque tria simul theoremata, trium axium principalium, conservationis momenti corporum rotantium, & compositionis motuum rotationis in corporibus quibuscumque ad definiendum motum sufficere. Datis scilicet tribus axibus principalibus vis impressa in tres alias resolvi potest, quæ motum aliquem rotationis circa tres ipsos axes singillatim excitent: deinde vero ex theoremate conservationis totius momenti erui potest velocitas rotationis uniuscujusque: ac denique juxta theorema compositionis motuum rotationis binas simul rotationes componendo, rotationemque inde prodeuntem componendo rursus cum tertia totus corporis motus definiri potest. Quæ cum in dissertatione ad Bononiensem Academiam conscripta jam exposuerim, hic rursus pro generali solutione problematis commemorari debent, antequam ex binis aliis problematis secundi formulis generales formulæ eruantur, quæ pariter motum corporis utcumque impulsi pro casu quolibet generaliter determinent.

CA-

CAPUT QUINTUM.

DE MOTU, ET ROTATIONE CORPORUM QUORUMCUMQUE.

PROBLEMA X.

DAta æquatione corporis invenire circa quos axes invariabilis rotatio aliqua haberi possit.

In primis si juxta Theor. VII. pro casu axis cujuspiam invariabilis in formulis præmissi lemmatis fiat $\int XY.dM = 0$, generalis æquatio habebitur

$$\frac{\pi}{\delta} = \frac{\omega\varpi.\overline{B-A} + \overline{1-2\varpi^2}.D}{\varpi E - \omega F}.$$

Deinde si fiat $\int XZ.dM = 0$ altera habebitur æquatio

$$\frac{\delta}{\pi} - \frac{\pi}{\delta} = \frac{\omega^2 A + 2\omega\varpi D + \varpi^2 B - C}{\omega E + \varpi F}.$$

Tertio si primæ æquationis valor in æquatione altera substituatur, fiet

$$\frac{\omega^2 A + 2\omega\varpi D + \varpi^2 B - C}{\omega E + \varpi F} + \frac{\omega\varpi.\overline{B-A} + \overline{1-2\varpi^2}.D}{\varpi E - \omega F}$$
$$= \frac{\varpi E - \omega F}{\omega\varpi.\overline{B-A} + \overline{1-2\varpi^2}.D}.$$

Quod si insuper fractionum priorum denominatores ducantur in numeratorem tertiæ fractionis, posito $\omega^2 + \varpi^2 = 1$, & reductis terminis erit

$$\omega(ED + FC - AF) + \varpi(BE - EC - DF)$$
$$= \frac{\overline{\omega E + \varpi F}.\overline{\varpi E - \omega F}^2}{\omega\varpi.\overline{B-A} + \overline{1-2\varpi^2}.D}.$$

Quod si denique fiat $\frac{\varpi}{\omega} = T$, ac sit T tangens anguli SGL;

adeo-

adeoque etiam $\pi^2 = \delta^2 T^2$, $\delta\pi = \delta^2 T$, $\overline{1 - 2\pi^2} = \delta^2 - \pi^2$ $= \delta^2 . \overline{1 - T^2}$ posterior æquatio in hanc aliam resolvetur

$$ED + FC - AF + T\,(BE - EC - DF)$$
$$= \overline{E + TF}.\left(\frac{T^2E^2 - 2TEF + F^2}{T.\overline{B - A} + \overline{1 - T^2}.D}\right),$$

ductisque in se invicem, atque ordinatis terminis prodibit

$$T^3(F.\overline{E^2 - D^2} + DE.\overline{B - C})$$
$$+ T^2(E.\overline{E^2 - 2F^2 + D^2} + DF.\overline{B - 2A + C} + E.\overline{A - B}.\overline{B - C})$$
$$+ T(F.\overline{F^2 - 2E^2 + D^2} + DE.\overline{A - 2B + C} - F.\overline{A - B}.\overline{A - C})$$
$$+ E.\overline{F^2 - D^2} + DF.\overline{A - C} = 0.$$

Corollarium I.

Quia æquationis cubicæ una saltem realis est radix, patet primo ex ipsa æquationis inspectione unum saltem esse axem, circa quem, si semel incœperit rotatio, a viribus centrifugis turbari nequeat. Statuamus planum HGS, ad quem scilicet coordinatæ corporis ut antea referuntur, in fig. 14. sic duci, ut sit SG axis hujusmodi invariabilis, & juxta Theor. VII. sit $\int xy.dM = 0$, $\int xz.dM = 0$. Posito $D = 0$, & $E = 0$ primus, secundus, & quartus æquationis cubicæ terminus evanescent, atque in tertio æquationis termino fiet $T.(F^2 - F.\overline{A - B}.\overline{A - C}) = 0$, sive pro eodem axe invariabili debebit esse $F^2 = \overline{A - B}.\overline{A - C}$.

Corollarium II.

Cum autem dato uno axe invariabili SG, juxta Probl. IX. æquatio, quæ binos alios axes determinat, esse debeat

tang. TGL $= \frac{\pi}{\delta} = \frac{C - B \pm \sqrt{(\overline{B - C}^2 + 4F^2)}}{2F}$, si valor quantitatis F ex superiori æquatione accipiatur, reducanturque termini omnes, pro binis aliis axibus fiet

$$\frac{\pi}{\delta} = \frac{C - B \pm \sqrt{(\overline{B + C}^2 + 4A.\overline{A - C - B})}}{2\sqrt{(\overline{A - B}.\overline{A - C})}}$$: dataque idcirco æ-

K quatione

quatione corporis, etiamsi nullus rotationis axis innotescat, ut in Probl. IX. assumpsimus, semper tres axes invariabiles, se invicem secantes ad rectos angulos, determinari poterunt.

PROBLEMA XI.

Datis tribus axibus principalibus corporis cujuscumque, & data qualibet vi impressa, motum rotationis inde ortum definire.

Sint modo in fig. 22. tres axes principales corporis cujuslibet propositi AG, BG, UG, & posito ut antea $PK = z$, $KF = y$, $FG = x$, momentum rotatoriæ velocitatis circa axem AG sit $\int \overline{z^2 + x^2} . dM = A + C$, circa BG sit $B + C$, & $A + B$ circa axem tertium plano AGB perpendicularem in centro G. Intelligamus insuper vim omnem, qua motus rotationis gignitur, utcumque ad planum AGB sit obliqua, resolvi in binas alias in puncto H, quarum una $M\varphi$ sit plano ipsi perpendicularis, altera $M\Delta$ juxta HA, aut HB perpendicularem rectæ HG dirigatur: nam quæ juxta HG portio totius vis exerceri potest, cum transeat per centrum gravitatis, motum omnem rotationis minime afficiet. Juxta ea quæ §. XVI. Introd. Par. I. Cosmographiæ fuerunt tradita, vi perpendiculari $M\varphi$ binæ aliæ perpendiculares pariter substitui poterunt, quarum una $\frac{BH.M\varphi}{AB}$ applicetur in puncto A, & rotationem gignat circa axem BG, altera $\frac{HA.M\varphi}{AB}$ applicetur in puncto B, & rotationem alteram circa AG gignat. Erit etiam vis prioris momentum $\frac{BH.AG.M\varphi}{AB}$, & rotationis velocitas $\frac{BH.AG.M\varphi}{AB.\overline{B+C}}$ momentum vis alterius $\frac{HA.BG.M\varphi}{AB}$, & rotationis velocitas $\frac{HA.BG.M\varphi}{AB.\overline{A+C}}$.

Denique si binæ vires perpendiculares sint plano tabulæ, puncta A, & B in rotatione utraque infra ipsum planum deprimi incipient, & velocitates binæ se destruent in recta LG ex parte altera axis BG obversa puncto eidem H, eritque

$$\text{tang.}\,LGB = \frac{HA.BG.M\varphi}{AB.\overline{A+C}} : \frac{BH.AG.M\varphi}{AB.\overline{B+C}} = \frac{HA.\overline{B+C}}{AG} : \frac{BH.\overline{A+C}}{BG}$$

iis-

iisdemque substitutis quarti problematis speciebus fiet

$$\frac{h}{l} = -\frac{g \,.\, \overline{A+C}}{f \,.\, \overline{B+C}}.$$

Inde vero solitis reductionibus eruetur

$$l = \frac{f \,.\, \overline{B+C}}{\sqrt{(f^2 . \overline{B+C}^2 + g^2 . \overline{A+C}^2)}} = \text{sin.} \, LGB.$$

Quare cum juxta Theor.IV. sin. LGB debeat esse ad radium ut velocitas $\frac{HA.\,BG.\,M\,\varphi}{AB.\,\overline{A+C}}$ circa axem AG concepta ad velocitatem rotationis circa axem LG compositæ, fiet hujusmodi velocitas $\frac{HA.\,M\,\varphi}{A+C} . \frac{g}{f} . \sqrt{\left(f^2 + g^2 \left(\frac{A+C}{B+C}\right)^2\right)}$. Denique cum vi $M\,\Delta$ totum corpus rotari debeat circa axem UG plano AGB perpendicularem in centro G, & rotationis novæ velocitas debeat esse $\frac{HG.\,M\,\Delta}{A+B}$, ac sit $\frac{HG}{HA} = \frac{f}{g}$, facta rursus duarum velocitatum divisione habebitur tangens deviationis axis LG ab axe TG rotationis ultimo compositæ, ac fiet

$$\text{tang.}\, TGL = \frac{\Delta \,.\, \overline{A+C} \,.\, \overline{B+C}}{\varphi \,.\, \overline{A+B} . \sqrt{(f^2 . \overline{B+C}^2 + g^2 . \overline{A+C}^2)}}$$

Corollarium I.

Hæc cum sit generalis formula, quæ rotationis motûm in quovis corpore, data qualibet vi impressa, & datis tribus axibus principalibus determinat, si in peculiari aliquo casu fiat $A = C = \int x^2 dM = \int z^2 dM$, quod locum habet in solidis revolutione figuræ alicujus planæ circa priorem axem AG genitis, fiet tang. $TGL = \frac{2\,\Delta \,.\, A}{\varphi \,.\, \sqrt{(f^2 . \overline{A+B}^2 + 4 g^2 A^2)}}$, ut in Probl. VII. alia ratione statutum fuerat. Ita si proponatur conus, & juxta Coroll.

Coroll. II. Probl. VI. ſit $A = C = \frac{1}{40} pe^4 b$, & $B = \frac{1}{160} pe^2 b^3$, fiet

$$\text{tang. TGL} = \frac{\pi}{\delta} = \frac{2 \Delta e^2}{\varphi \sqrt{(f^2 \cdot e^2 + \frac{1}{4} b^2)^2 + 4 g^2 e^4}}.$$

Corollarium II.

Si rotationis momenta non circa binos axes BG, UG, ſed circa binos BG, AG æquentur, & ſit $A + C = B + C$, adeoque $A = B = \int x^2 . dM = \int y^2 . dM$, erit $\frac{h}{l} = -\frac{g}{f}$, &

tang. $LGB = -$ tang. HGA: ac deinde erit

$$\text{tang. TGL} = \frac{\Delta}{\varphi} \cdot \frac{A + C}{A + B} = \frac{\Delta}{\varphi} \cdot \frac{A + C}{2A},$$ atque angulus TGL minime pendebit ex angulis HGA, & LGB. Id locum habet in ſolidis revolutione figuræ planæ circa axem UG genitis: unde ſi proponatur conus, & planum AGB ſit axi figuræ perpendicularis, manentibus aliis præcedentibus denominationibus, & poſito

$A = B = \frac{1}{40} pe^4 b$, & $C = \frac{1}{160} pe^2 b^3$ fiet tang. $TGL = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\Delta}{\varphi} \cdot \overline{\frac{1}{2} + \frac{b^2}{8e^2}}$.

Corollarium III.

Si ſit $B = C$, & $A + B = A + C$, hoc eſt ſi exæquentur momenta rotationis circa axes binos AG, UG, quod locum habet in ſolidis revolutione figuræ planæ circa axem BG genitis, erit

$$\frac{h}{l} = -\frac{g . \overline{A+B}}{2f . B} = -\frac{g}{2f} . \overline{1 + \frac{A}{B}}, \; \& \; \frac{\pi}{\delta} = \frac{2 \Delta B}{\varphi . \sqrt{(4 f^2 B^2 + g^2 . \overline{A+B}^2)}}.$$

Quod ſi igitur data eadem quantitate, ac directione vis impreſſæ conus hanc alteram poſitionem habeat, & ſit

$\int y^2 . dM = \int z^2 . dM = B = C = \frac{1}{160} p e^2 b^3$, & $\int x^2 . dM = A = \frac{1}{40} p e^4 b$,

fiet $\frac{h}{l} = -\frac{g}{2f} . \overline{1 + \frac{4e^2}{b^2}}$, &

$$\text{tang. TGL} = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\Delta b^2}{\varphi \sqrt{(f^2 b^4 + 4 g^2 . \overline{e^2 + \frac{1}{4} b^2}^2)}}.$$

Pro-

PROBLEMA XII.

Data qualibet vi impressa, & coordinatis corporis relatis ad planum illud, quod transit per centrum gravitatis, atque est directioni ejusdem vis perpendiculare, invenire æquationes, quæ positionem axis rotationis ad idem planum determinant.

Positis omnibus ut in Probl. II., & in fig. 17., cum prior æquatio, quæ positionem axis rotationis determinat, esse debeat $\int \overline{Z^2 + Y^2} . dM = \frac{\delta}{\pi} \int XZ . dM$, si valores quantitatum $\int \overline{Z^2 + Y^2} . dM$, & $\int XZ . dM$ assumantur ex corollario secundo præmissi lemmatis, & posterior hæc quantitas ducatur in $\frac{\delta}{\pi}$, ac posito semper $\pi^2 + \delta^2 = 1 = \varpi^2 + \omega^2$, fiet primo

$$(\varpi^2 + \omega^2 . \overline{\pi^2 + \delta^2}) . A = A$$
$$(\omega^2 + \varpi^2 . \overline{\pi^2 + \delta^2}) . B = B .$$

Deinde vero evanescent termini, in quibus occurrunt quantitates C, & D. Ac denique iisdem substitutionibus prodibit

$$-\left(2\omega\varpi\delta + \frac{\omega\delta^3}{\pi} - \omega\pi\delta\right) . E = -\frac{\omega\delta}{\pi} . E$$
$$-\left(2\varpi\pi\delta + \frac{\varpi\delta^3}{\pi} - \varpi\pi\delta\right) . F = -\frac{\varpi\delta}{\pi} . F .$$

Quare collectis terminis prior illa æquatio abibit in hanc aliam

$$\frac{\pi}{\delta} = \frac{\omega E + \varpi F}{A + B} .$$

Erit etiam juxta idem Probl. II. altera motus æquatio $\int \overline{Z^2 + Y^2} . dM = \frac{\omega\delta}{\varpi} . \int XY . dM$, & valore totius summæ $\int XY . dM$ ut antea accepto, ductoque in $\frac{\omega\delta}{\varpi}$ prodibit eodem ordine

$$(\varpi^2 + \omega^2 . \overline{\pi^2 + \delta^2}) . A = A$$
$$(\omega^2 + \varpi^2\pi^2 - \omega^2\delta^2) . B = \pi^2 B .$$

Deinde supererit terminus $\delta^2 C$, & fiet insuper

$$-\left(2\omega\varpi\delta^2 + \frac{\omega^2}{\varpi} . \delta^2 - \omega\varpi\delta^2\right) . D = -\frac{\omega\delta^2}{\varpi} . D .$$

Su-

Supererit etiam terminus $-\omega\pi\delta.E$, ac fiet denique

$$-\left(2\varpi\pi\delta+\frac{\omega^2}{\varpi}\pi\delta\right).F=-\pi\delta.\frac{1+\varpi^2}{\varpi}.F.$$

Quare cum ſit $A=\overline{\pi^2+\delta^2}.A$, terminis omnibus per $\pi\delta$ diviſis fiet altera rotatorii motus æquatio

$$\overline{\frac{\pi}{\delta}+\frac{\delta}{\pi}}.A+\frac{\pi}{\delta}.B+\frac{\delta}{\pi}.C-\frac{\omega\delta}{\varpi\pi}.D=\omega E+\frac{1+\varpi^2}{\varpi}.F.$$

Quod ſi vero binæ æquationes hujuſmodi ſimul componantur, & valores quantitatum $\frac{\pi}{\delta}$, & $\frac{\delta}{\pi}$ ex priore æquatione eruti, in ſecunda æquatione ſubſtituantur, prodibunt ordine æquationes aliæ

$$\frac{A+B}{\omega E+\varpi F}.\left(A+C-\frac{\omega}{\varpi}.D\right)+\omega E+\varpi F=\omega E+\frac{1+\varpi^2}{\varpi}.F$$

$$\overline{A+B}.\overline{A+C}=F^2+\frac{\omega}{\varpi}.FE+\frac{\omega}{\varpi}.D.\overline{A+B}$$

$$\frac{\varpi}{\omega}=\frac{FE+D.\overline{A+B}}{\overline{A+B}.\overline{A+C}-F^2}.$$

Corollarium I.

Ita igitur ſi in fig. 17. planum hGS tranſeat per centrum gravitatis G, & ſit perpendiculare directioni vis impreſſæ FHh, & perpendiculum ex puncto quocumque corporis propoſiti demiſſum in idem planum vocetur z, ſintque aliæ corporis coordinatæ in plano ductæ y, x, ac poſito ut antea $\int x^2.dM=A$, $\int y^2.dM=B$, $\int z^2.dM=C$ &c., ex parte coordinatarum y poſitivarum ita accipiatur angulus hGL ut ſit ipſius tangens $\frac{\omega}{\varpi}=\frac{\overline{A+B}.\overline{A+C}-F^2}{FE+D.\overline{A+B}}$;

ac deinde in plano alio per LG ducto, & perpendiculari ad bGL ita accipiatur angulus LGT ut ſit ipſius tangens $\frac{\pi}{\delta}=\frac{\omega E+\varpi F}{A+B}$,

habebitur quæſitus rotationis axis TG.

Co-

COROLLARIUM II.

Si in peculiari aliquo casu fuerit $F = o$, hoc si summa omnium $yz.dM$ oppositione signi, & terminorum æqualitate destruatur in toto corpore, fiet tangens anguli $hGL = \frac{A + C}{D}$, & ipsius quantitas minime pendebit ex summis aliis B, & E: tangens vero anguli alterius LGT erit $\frac{\omega E}{A + B}$, & cum quantitas ω, seu sinus anguli hGL pendeat ex summis A, C, D, pendebit simul tangens hujusmodi ex summis omnibus A, B, C, D, E. Quod si posito $F = \int yz.dM = o$, & simul sit $\int xz.dM = E$, evanescet tangens anguli LGT, ac rotationis axis TG cadet in planum hGL, & tangens anguli alterius hGL adhuc erit $= \frac{A + C}{D}$. Quod si posito $F = o$, & $E = o$ sit insuper $D = \int xy.dM = o$, rotationis TG, ut antea, cadet in planum hGL, & tangens anguli hGL fiet major quacumque data, hoc est angulus ipse fiet rectus.

COROLLARIUM III.

Patet autem utramque summam $\int yz.dM$, $\int xz.dM$ in toto corpore non posse destrui nisi planum hGL, quod per gravitatis centrum perpendiculariter ad directionem vis impellentis ducitur, dividat totum corpus in partes æquales, similes, & similiter hinc inde positas: qui est casus aut laminæ perpendiculariter impulsæ, aut corporum regularium, & rotundorum, in quibus similiter vis impressa sit perpendicularis plano per figuræ axem traducto. Rursus igitur ex formulis generalibus colligitur, quod in Coroll. II., & III. Probl. II. jam dictum est, rotationis axem in hisce casibus jacere in eodem plano, cui perpendicularis est vis impressa. At insuper manifestum est præter binas priores summas summam etiam $\int xy.dM$ destrui non posse nisi etiam planum per gravitatis centrum, & directionem vis impellentis ductum hinc inde relinquat partes æquales, similes, & similiter positas: qui est casus corporum regularium in ipso figuræ axe impulsorum. Tum ergo rotationis axis cum perpendiculari linea e centro ad directionem vis impellentis ducta angulum rectum constituet.

Co-

COROLLARIUM IV.

Generatim si rotationis axis jaceat in plano hGL per gravitatis centrum perpendiculariter ad directionem FHh vis impellentis ducto, posito $\pi = 0$, ex priori hujus problematis æquatione eruetur $\frac{\varpi}{\omega} = -\frac{F}{E}$: ex altera vero æquatione cum primo eruatur

$$A + \pi^2 . B + \delta^2 . C - \frac{\omega}{\varpi} \delta^2 . D - \omega \pi \delta . E - \pi \delta . \frac{\overline{1 + \varpi^2}}{\varpi} = 0,$$

similiter posito $\pi = 0$, & $\delta = 1$, eruetur etiam $\frac{\varpi}{\omega} = \frac{D}{A+C}$. Ut ergo rotationis axis jaceat in plano per gravitatis centrum normaliter ad directionem vis impellentis ducto tangens anguli LGS binos hos simul valores habere debet $-\frac{E}{F}$, & $\frac{D}{A+C}$, sive esse debet $FD = -E.\overline{A+C}$. Quod cum generatim in corpore quocumque locum habere nequeat, rursus patet axem totius rotationis, quæ a vi aliqua utcumque impressa excitari potest, nec semper esse perpendicularem plano per gravitatis centrum, & directionem vis impellentis ducto, nec semper etiam jacere in plano, quod ex eodem centro perpendiculariter ad directionem eamdem vis impellentis duci potest.

COROLLARIUM V.

Denique cum sit tang. $LGT = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\omega E + \varpi F}{A + B}$, cumque summæ omnium x^2, y^2 positivum valorem habeant, nec unquam esse possit $A = 0$, $B = 0$, $\delta = 0$, patet in corpore quovis proposito ad rectum usque augeri non posse angulum LGT deviationis axis a plano hGL. Fiet autem maximus idem angulus, & tangens $\frac{\pi}{\delta}$ valorem maximum obtinebit cum elementis sumptis fiet $E.d\omega + F.d\varpi = 0$. Quare cum sit elementum sinus $d\varpi = -\frac{\omega . d\omega}{\varpi}$, ut ex prioribus partis alterius formulis colligitur, quo in casu angulus LGT deviationis axis TG a plano hGL in corpore quovis proposito fiet maximus, debebit esse

$$\frac{\omega}{\varpi} = \frac{E}{F} = \frac{\overline{A+B} . \overline{A+C} - F^2}{FE + D.\overline{A+B}}.$$

SCHO-

SCHOLION.

Formulæ omnes, quas in posteriori hoc problemate ex aliis Probl. I. & II. formulis derivavimus, eædem sunt, quas tradiderat Eulerus in Prop. LIX. de motu corporum rigidorum. Est enim apud Eulerum x, & y quod apud nos y, & $-x$: ac litteris A, B, E, F ordine designavit ipse, quod nos litteris B, A, F, E: & quantitates F, & D apud ipsum negativo signo accipiuntur. Hæ formulæ binis angulis, ex quibus pendet positio axis rotationis, generatim in quovis corpore determinandis sufficiunt. Eædem etiam certo indicant non nisi in peculiaribus quibusdam casibus verum esse, quod generatim Johannes Bernoullius principii loco assumpserat: scilicet axem rotationis non semper jacere in plano per gravitatis centrum normaliter ad directionem vis impellentis ducto. Utcumque vero ad minimos terminos reductæ formulæ omnes videri possint, qui iisdem in casu aliquo etiam simpliciori uti vellet, ut esset casus laminæ oblique impulsæ, multum adhuc sibi operis restare ad rotationis axem, & motum omnem determinandum facile intelligeret. Nam si eadem Euleri methodo semiordinatæ x, y accipiantur in plano SGh, quod directionem vis impressæ FHh ad rectum angulum secet in puncto h, & planum laminæ propositæ transeat per G, H, data æquatione, quæ secundi hujus plani figuram exprimit, longiori calculo esset opus, ut semiordinatæ prioris plani æquatione alia exprimi possent pro qualibet utriusque plani inclinatione. In casu etiam coni, aut conoidis, aut solidi alterius rotundi eadem æquationum reducendarum difficultas semper occurreret cum directio vis impressæ nec per figuræ axem transiret, nec jaceret in plano normaliter ad axem ducto, & semiordinatæ in plano alio extra axem deberent accipi. Cum itaque de simpliciori, ac directa solutione problematis cogitarem capite tertio libri hujus deprehendi primum illud compositionis motuum rotationis theorema casibus omnibus planorum, solidorumque regularium optime satisfacere: quinimo etiam in casu alio quolibet valere, in quo axis rotationis abduci nequit a plano, cui data vis perpendiculariter imprimitur. Ad casum hunc generalem motus corporis cujuscumque irregularis, datis tribus axibus principalibus, facile reducitur, ut in Probl. XI. instituto calculo ostendimus. Cum itaque tres illi axes principales in quovis corpore, æquatione ad planum quodvis relata, determinari possint, eadem rotationum componendarum methodus Problemati generaliter resolvendo, applicandoque ad casus singulos sufficiet.

ciet. Neque vero difficilius esset, definito jam motu initiali corporis, successivas omnes variationes, quibuslibet ex caussis ortas, simili semper ratione, ac methodo supputare: quod argumentum ingegniose pertractavit Eulerus in capitibus potissimum X., XV., & XVI. de motu corporum rigidorum. In Probl. VIII. attulimus jam exemplum earum variationum, quæ ex internis caussis, atque ex inæqualitate momenti virium centrifugarum oriri possunt. Inferius exemplum aliud late exponetur virium extrinsecus agentium, & variationum omnium diurni motus, quæ ex mutuis Planetarum omnium actionibus oriuntur. Hæc jam suscepti operis Cosmographici institutum a nobis modo postulabat. Qui analogis aliis problematis resolvendis, definiendæ rotationi corporum in planis inclinatis descendentium, aut in horizontali plano provolutorum, supputandis oscillationibus navium e latere, atque in longum conceptis operam dabunt Geometræ, ac Mathematici facile sentient quantum subsidii fundamentale hoc nostrum Mechanicæ principium undique afferre possit.

DE

DE FIGURA PLANETARUM.

LIBER SECUNDUS.

MEridiani terreſtris gradus jam dudum metiri cœperant Eratoſthenes, Poſſidonius, Arabes, Nervoodus, Snellius, Picartus, Caſſinus ſenior. Earum vero menſurarum moduli non ita certi erant, nec inſtrumenta adeo exacta ut cum aliis ætatis noſtræ poſſent comparari. Nervoodus cum anno 1635 Londini, & Aeboraci diſtantiam pedum Londinenſium 905751, & differentiam latitudinum utriuſque loci 2° 28' eſſe inveniſſet, ſit autem Londini altitudo poli 51° 31', accepto differentiæ ipſius dimidio, in latitudine 52° 45' gradus unius menſuram conſtituit pedum Londinenſium 367196. Eos in Propoſ. XIX. Lib. III. Newtonus hexapedas Pariſienſes 57300 ſcripſit conficere. Conficerent autem hexapedas 57445 ſi pes Londinenſis ad Pariſienſem pedem ſe haberet ut 811 : 864, quemadmodum in actis Pariſienſis Academiæ anni 1738 collatis diligenter menſuris ſtatutum eſt. Ejuſdem gradus determinationem accuratiorem cenſuit Maupertuiſius quod ad meridiani planum menſuras reduxerit Nervoodus, quodque altitudinem ſolſtitialem Solis ſextante pluſquam pedum quinque pro definienda Aeboraci, & Londini latitudine obſervaverit. At cum in obſervanda ſolſtitiali Solis altitudine, refractionibuſque æſtimandis aliquot ſecundorum error evitari nequeat, cumque ſi integro gradui hexapedæ 57445 reſpondeant, uno minuto ſecundo gradus hexapedæ 16 reſpondere debeant, vel hoc uno argumento patet Londinenſem gradum non niſi intra laxiores limites fuiſſe definitum.

In Batavia cum aſtronomicas Snellii obſervationes Jacobus Caſſinus, & D. de Thury ipſius filius menſuras geodeticas correxiſſent, meridiani terreſtris gradum in latitudine 52° 4' ſtatuerunt hexapedarum 57145, ut in actis Pariſienſibus anni 1747 legitur, minorem ſcilicet hexapedis 300, quam qui in Anglia a Nervoodo

 in

in eadem fere latitudine deprehenſus fuerat. Idem etiam Caſſinus de Thurry in præclaro opere meridianæ lineæ verificatæ gradus alios in Galliis a Caſſino ſeniori, & Picarto obſervatos recognovit. Picartus in lat. 49° 23' integro gradui tribuit hexapedas 57060: & Maupertuiſius correctione addita ob refractionem ſtellarum, ex quibus poli altitudo colligebatur, gradum eumdem cenſuit hex. 57183. Caſſinus vero, & Caillius anno 1740 in baſi a Picarto aſſumpta errorem deprehenderunt, qui compenſabat fere errorem alium refractionis in cæleſtibus obſervationibus neglectæ, eoque errore correcto prodiit idem gradus hexap. 57074. Et quidem correctio baſeos quinquies repetita eſt menſuris intra paucos digitos convenientibus: & cum in ſuſpicionem iterum adducta eſſet, anno 1756 a Cl. Monnierio, aliiſque Academiæ ſociis recognita, & confirmata eſt.

Iidem etiam Aſtronomi meridianam lineam Pariſiis ad Pirenæos uſque perduxerunt, & gradum circuli ad æquatorem paralleli in lat. 43° 32' ſumma diligentia determinarunt. Et quidem paralleli illius gradus prodiit hex. 41618: meridiani autem gradus prodierunt ordine ut ſequitur

I.	latitudo	49.° 56.'	gradus hexap.	57084.
II.		49. 23.		57074.
III.		49. 3.		57069.
IV.		47. 58.		57071.
V.		47. 41.		57057.
VI.		46. 51.		57055.
VII.		46. 35.		57049.
VIII.		45. 45.		57050.
IX.		44. 53.		57042.
X.		43. 31.		57048.

Tot inter vero obſervationes, quæ ætate hac noſtra pro cognoſcendis meridiani gradibus, & definienda figura Terræ inſtitutæ ſunt, in Aſtronomorum faſtis memorabitur ſemper litteraria expeditio, quæ a Pariſienſi Academia ad æquatorem, & polarem circulum decreta eſt. Bouguerius in Peruviana planitie anno 1736 ac-

accepta basi hexapedarum 6272, pedum 4, & pollicum 7, atque inde ductis triangulis 32, observatisque angulis eorumdem omnibus, ac supputatis postmodum lateribus ex basi, & angulis, distantiam hexapedarum 176940 in meridiani plano, & hexapedis 1226 supra libellam maris accuratissime dimensus est: quam cum arcui $3° 7' 1''$, observatis utrimque poli altitudinibus, respondere deprehendisset, unico gradui hexapedas 56767 in altitudine illa assignavit: ac denique hexapedas $21\frac{2}{5}$ demendo ut mensura omnis ad maris libellam reduceretur, addendoque alias 7 hexapedas caloris gratia, quo virgæ producebantur, primum meridiani terrestris gradum, qui ab æquatore incipit, definivit hexapedarum 56753. Condaminius posita eadem cælestis arcus amplitudine, ex aliis angulorum mensuris, ac reductionibus gradum ipsum constituit hexapedarum 56749: Goudinius vero 56746 ex aliis seriebus triangulorum: ac denique Hispani laborum socii, Cl. Iuan, & Ulloa eumdem gradum statuerunt hexap. 56767.

Maupertuisius eodem anno in Lapponia, atque in plana lacus glacie obstricti superficie, accepta basi hexapedarum 7406 ped. 5. poll. 2., ope octo triangulorum meridiani arcum, qui Torneæ, & Kittis interjacet, definivit hexap. 55023. 47: cumque arcum ipsum deprehendisset $57' 28.67''$, & mediam loci utriusque latitudinem invenisset $66° 20'$, meridiani gradum in ea latitudine censuit hexap. 57437. 9. Bouguerius sect. VI. §. XXI. de Figura Terræ hexapedas 16 subducendas esse monuit ratione refractionis, qua cælestis arcus $1''$ latior efficiebatur, atque ita gradum eumdem definivit hexap. 57422. At insuper notandum est priorem illam gradus Lapponici mensuram ex quinque triangulorum combinationibus inter se fere congruentibus a Maupertuisio fuisse erutam. Septem aliæ triangulorum series ab ipso exhibitæ gradum eumdem breviorem exhibent singulæ hexapedis $6\frac{1}{2}$, $17\frac{1}{2}$, 27, $30\frac{1}{2}$, $32\frac{1}{2}$, 36, $51\frac{1}{2}$, ut apud Maupertuisium Cap. III. de Figura Terræ videre est. Quare si observationes singulæ spectentur veluti totidem æqualia pondera, inquiraturque centrum commune gravitatis juxta regulam a Cotesio traditam in Schol. II. Theor. XXVIII. de æstimatione errorum in mixta Mathesi, vel si juxta vulgares probabilitatum regulas sumatur medium arithmeticum ex omnibus, gradus idem satis proxime censeri poterit hexap. 57405. Peruviani, Lapponici, & Parisiensis gradus comparatione patuit arcus eumdem angulum unius gradus subtendentes breviores esse circa æquatorem, & inde ad polos transeundo augeri: quod esse nequit nisi

nisi terrestris superficies majorem curvitatem circa æquatorem habeat, & circa polos magis complanetur, hoc est nisi Terra omnis figuram alicujus sphæroidis referat compressæ ad polos, & circa æquatorem elatioris.

Post priores illas, & celeberrimas terrestrium graduum observationes, quæ deinde in Africa, in America Septentrionali, in Italia, atque in Germania observationes aliæ institutæ sunt, cum Terram ad polos compressam esse confirmaverint, dubiis postmodum aliis, ac disputationibus locum præbuerunt de compressionis totius quantitate, & de meridianorum terrestrium, & hemisphæroidis australis, & borealis dissimilitudine. In Africa prope promontorium Bonæ Spei, atque in latitudine Australi 33° 18', quatuor triangulorum ope D. la Caille ad labores pene solus, admirabili diligentia, integrum meridiani gradum invenit esse hexapedarum 57037. In America vero Septentrionali, atque in ampliori Pensilvaniæ planitie prope Alleganos montes Astronomi celeberrimi Mason, & Dixon pro latitudine Boreali 39° 12' meridiani gradum primo invenerunt hexapedarum 56904½: deinde vero adjectis aliis caloris correctionibus statuerunt 56888, ut in Transactionibus Philosophicis anni 1768 legitur. Ita igitur gradus hujusmodi hexapedis 149 esset brevior, quam qui in Australi hemisphærio sex fere gradibus propior est æquatori.

In Italia binas habemus graduum mensuras. Primam debemus clarissimis Boscovichio, & Mairio, qui institutarum observationum seriem fuse exposuerunt in opere eximio de Expeditione litteraria per ditionem Pontificiam. Summa omnium est quod cum meridiani arcum Roma Ariminum usque per duos circiter gradus trans Apenninos montes traduxissent ipsi, habitis reductionibus omnibus, correctionibusque instrumentorum, unius gradus mensuram in latitudine 43° 1' statuerunt hexap. 56979. Alter gradus Italicus a Cl. Beccaria determinatus est, qui cum cælestem arcum Augustæ Taurinorum, & Monti Regali interjectum ad pedes Alpium deprehendisset 40' 40'', & prioribus reductionibus arcum terrestrem supputasset hexapedarum 38680, poli altitudine Taurini posita 45° 4' 14'' in latitudine 44° 44' integro gradui primum tribuendas censuit hexapedas 57069. In libro de gradu Taurinensi, quem, dum hæc eduntur, celebris & amicus Author ad me misit, correctis omnibus reductionibus arcui eidem terrestri hexapedas 38733 assignavit, integrum autem gradum in eadem latitudine constituit hexap. 57137.8. Taurino etiam progressus ad pedes Al-

pium

pium Andratas usque, arcui 27' 4'' respondere invenit hexapedas 26153 $\frac{2}{3}$: & cum Taurino Montem Regalem versus arcui 27' 4'' respondeant hexapedæ circiter 25780, in binis arcubus contiguis differentiam hex. 373 protulit. Ex posteriori arcu gradus integer erueretur hexap. 57965 $\frac{1}{3}$: ex utroque simul 57468 $\frac{1}{3}$.

Arcum fere trium graduum in Stiria, Austria, & Moravia, Varasdino Brinnam usque Cl. Liesganig dimensus est, & gradum alterum in inferiori Hungaria prope Tibiscum, quam proprie Cumaniam vocant. Et quidem gradus Hungaricus, seu Cumanus in latitudine 45° 57' prodiit hexapedarum dumtaxat 56881, hexapedis 156 minor Africano gradu, & 169 minor gradu alio, qui in Galliis sub eadem fere latitudine exploratus est. Gradum vero Austriacum in latitudine 48° 43' constituit hexapedarum 57086, paulo majorem gradu Parisiensi, ut author idem fusius exposuit in præclaro opere de graduum dimensione. Tantam autem differentiam arcuum integro gradui respondentium in planiori Austriæ regione, & prope altissimos Stiriæ montes invenit ipse, ut cum Viennam inter & Græcium meridiani gradus prodierit hexapedarum 56907, qui deinde Græcio Varasdinum usque interjicitur gradus ad hexapedas usque 57350 $\frac{1}{2}$ ascendere visus sit. Unde ibi in binis arcubus contiguis integri gradus angulum subtendentibus differentia prodiit hexapedarum 443 $\frac{1}{2}$.

Omisso autem eo Stiriæ gradu, duodecim alii gradus qui ad cognoscendam figuram Terræ, & terrestrium meridianorum maxime idonei censeri possunt, ab æquatore pergendo ad polos erunt ordine ut sequitur

I.	Peruvianus. Latitudo	0		Gradus hexaped.	56753.
II.	Africanus.	33.°	18'.		57037.
III.	Pensilvanus.	39.	12.		56888.
IV.	Romanus.	43.	1.		56979.
V.	Gallicus prior.	43.	31.		57048.
VI.	Taurinensis.	44.	44.		57137.8
VII.	Alter Gallicus.	45.	45.		57050.
VIII.	Hungaricus.	45.	57.		56881.
IX.	Viennensis.	48.	43.		57086.
X.	Parisiensis.	49.	23.		57074.
XI.	Batavicus.	52.	4.		57145.
XII.	Lapponicus.	66.	20.		57405.

Antequam vero comparatis inter se invicem gradibus omnibus videamus quid curvaturæ terrestrium meridianorum, quid irregularita-

rita-

ritatibus interni textus, & attractioni montium debeat tribui, in primis quærendum est intra quos limites gradus singuli certi esse possint. Bouguerius Sect. I. §. IV. de figura Terræ ingenue fassus est se intra limites 3, aut 4 secundorum suspectas habere observationes illas, quibus fixarum distantiæ a vertice, & altitudines poli in locis singulis determinari solent: suspicionisque totius illam rationem attulit, quod repetitæ observationes secundis 3, aut 4 vere inter se differant, ut in sectione quinta operis ejusdem legitur. Id alii omnes Astronomi celeberrimi de errorum limitibus agentes confirmarunt: certo autem ostendit Clarifs. Maskelinius cum in expeditione ad insulam S. Helenæ pro parallaxi Sirii, aliisque Caillii observationibus recognoscendis suscepta deprehendit iis sectoribus, quibus Maupertuisius, aliique ad mensuram graduum usi fuerant, frictionem fili ex instrumenti centro suspensi errorem 3'', aut 4'' in partes adversas quandoque parere: ut fuse a summo ipso Astronomo cum Grenovicii essem accepi. Quod si itaque error 3'' pro utroque arcus extremo bis accipiatur, distribuaturque per tres meridiani gradus, quos in Peruvio Bouguerius cum sociis præclarissimis dimensus est, gradus unius mensuram intra 2'' suspectam faciet. Et cum integro gradui prope æquatorem hexapedæ 56753, adeoque uni minuto primo 946, secundo fere adhuc 16 respondeant: cumque insuper geodeticæ, & terrestres arcus illius mensuræ hexapedis fere 10 pro unoquoque gradu differentiant inter se invicem, errorum limites pro priori meridiani gradu statuit Bouguerius 42 circiter hexapedarum. Condaminius Par. II. §. XXVI. de tribus prioribus meridiani gradibus ita Bouguerio assentitus est, ut errorem Astronomicarum observationum 3'' in utroque arcus extremo, & 6'' in toto arcu, errorem autem geographicum in toto arcu hexapedis 18, adeoque simul in eodem meridiani gradu errorem omnem hexapedis 35, aut 40 majorem esse non posse dixerit.

Id de gradu etiam Lapponico dici potest cum binis observationibus distantia parallelorum Torneæ, & Kittis prodierit 57' 26.93'', & 57' 30.42'', acceptoque medio arithmetico interpositi arcus amplitudo 57' 28.67'' a Maupertuisio statuta sit: unde quia arcus ipse ne gradum quidem unum exæquabat, qui observando error 2'' subrepsisset, in gradu Lapponico errorem peperisset 32 hexapedarum. Erroris autem exigui cujuspiam suspicio in definiendo eodem arcu videtur gravior, quod in utroque extremo altitudo poli inversione instrumenti, ut moris est, minime fuerit recognita,

gnita, quemadmodum Caſſinus Maupertuiſio ſtatim poſt reditum e polari circulo objecerat. Iidem errorum limites ſtatui poſſent pro Africano gradu, aliiſque etiam, qui neque tantis ſubſidiis, neque a tot ſimul laborum ſociis definiti ſunt. Picartum obſervatorem ſui temporis ſane diligentem in accipienda hexapedæ unius menſura, & menſuris aliis inde pendentibus, totoque gradu determinando milleſima parte circiter erraviſſe poſterioribus Aſtronomorum Pariſienſium curis innotuit. In elementis Trigonometriæ ſphæroidicæ, quam anno 1753 actis Berolinenſibus inſeruit Cl. Eulerus, cenſuit in ipſa etiam nuperrima Pariſienſis gradus menſura errorem 100, & amplius hexapedarum ſupereſſe poſſe. Id autem in ſubſequenti Academiæ volumine nimium Caillio viſum eſt. Verum qui attente conſideret methodum omnem graduum dimetiendorum in operibus memoratis, & recentioribus etiam inſtitutionibus Trigonometricis ſatis expoſitam, qui ſimul velit perpendere ex quot elementis menſura gradus unius pendeat, quæ in accipienda baſi, quæ in obſervandis, reducendiſque angulis triangulorum baſi adjacentium, quæ in definienda arcus totius amplitudine ſit difficultas, concedet facile quod Alembertus in præfatione Par. III. de mundi Syſtemate, aliique authores cenſuerunt, gradus unius menſuram intra limites *60* circiter hexapedarum incertam eſſe.

Jam vero poſt celebrem illam Condaminii, & Bouguerii obſervationem, qua ad pedes ingentis Americani montis, Chimboraſi nomine, quadrantis filum ſenſibiliter deviaſſe a perpendiculo deprehenſum eſt, mediamque aberrationem fuiſſe circiter $7\frac{1}{2}''$, ſuſpicari univerſim licuit attractione montium deflecti in adverſas partes fila pendulorum, atque ita magnitudinem graduum variari, nec gradus omnes intra aſſignatos etiam errorum limites determinandæ figuræ terreſtrium meridianorum æque eſſe idoneos. Et plane ſi gravitatem terreſtrium corporum ad ſingulas Terræ particulas fieri intelligamus, atque attractiones ſphærarum homogenearum ſint radiis proportionales, ac mediocris Terræ radius aſſumatur hexapedarum 3273008, ad habendam aberrationem $9''$ a perpendiculo, cujus ſinus ſe habet ad ſinum totum ut 1:*22918*, ſatis erit ſphæra homogenea, cujus radius ſit hexapedarum 143 circiter, ſive etiam monte hemiſphærico duplæ altitudinis. Quod ex natura univerſalis, & mutuæ gravitatis corporum omnium conſequitur, certo evicerunt clariſſimorum Beccaria, & Lieſganig obſervationes. Cum enim in hypotheſi qualibet continuæ curvaturæ meridianorum contigui

M

tigui gradus certo ordine augeri, aut minui paulatim debeant, ille quidem in binis arcubus, angulum 27' 4'' subtendentibus, eum qui ad Alpes propius accedebat, 373 hexapedis longiorem esse invenit, quæ differentia aberrationi penduli 25'' circiter responderet: hic vero citra, & ultra altissimos Stiriæ, & Græcii montes differentiam duorum graduum contiguorum invenit hexapedarum 443½: ita quidem ut qui in ampliori Austriæ, & Moraviæ planitie, exiguis dumtaxat collibus interspersa, prodiit meridiani gradus tantumdem fere superet gradum alterum, qui Viennæ, & Græcio interjicitur, quantum a tertio gradu deficit, qui interjicitur Græcio, & Varaldino.

Plurimi idcirco facio mensuram graduum hexapedis 1200 supra libellam maris institutam prope Peruvianos montes, qui cum a Borea in Austrum se porrigant, composita omnium actione quadrantis filum deflecti in plano ipso meridiani circuli non poterat. Ibi etiam ex boreali parte altitudo poli, ut a Cl. Condaminio accepi, in vertice exigui montis a cæteris satis dissiti sumpta est, atque ex australi parte in lenissimo montis alterius ascensu. Simili modo Lapponicæ observationes minus suspectæ hac de causa esse possent, quod ad metiendam totius arcus amplitudinem, ut retulit Maupertuisius, poli elevatio in vertice montis Kittis sumpta sit, atque ex altero arcus ejusdem extremo Torneæ, quæ Urbs duas inter montium series constituitur. Observationes etiam quæ Taurini, & Monte Regali ad definiendam interjecti arcus amplitudinem institutæ sunt, minus videbantur actione eorum montium turbari posse, qui in arcu alio ad boream, & ad pedes usque alpium traducto tantam mensurarum differentiam exhibuerant: ac pariter mensuræ graduum, & paralleli circuli, & meridiani in Australi Gallia non adeo variari poterant actione pyrenæorum montium, qui fere arcum circuli alterius paralleli referunt, & fere in ipso meridianæ Parisiensis termino assurgere occidentem versus incipiunt. Idem videtur dicendum esse de aliis gradibus, qui in ampliori planitie septentrionalis Galliæ, Bataviæ, Austriæ, & Moraviæ sumpti sunt, ubi non nisi interni telluris textus, non vero extimæ superficiei inæqualitates ullæ assignari possunt, quæ graduum mensuras aut majores, aut minores faciant. Omissis itaque inæqualitatibus ipsis interni textus Peruvianus, Lapponicus, Batavus, Viennensis, Taurinensis, Gallici gradus, intra eos, quos jam attigimus diligentiæ limites correcti, præcipue idonei erunt ut ad figuram meridianorum terrestrium determinandam adhibeantur.

At

At vero ad definiendam arcus Romani duorum circiter graduum amplitudinem elevationes poli citra, & ultra Apenninos montes Romæ, & Arimini sumptæ sunt: unde attractione massæ interjacentis, pendulo in contrarias partes distracto, cælestem arcum majorem prodiisse necesse est, & ipso arcui respondentes terrestres mensuras meridiani gradum breviorem exhibuisse. Contraria ratione conjici facile, ac divinari poterat in australi Africæ parte, & circa promontorium Bonæ Spei mensuram unius gradus majorem prodire oportuisse. Nam si omnem differentiam materiæ, quæ in tota Africa, & amplissimo Oceano australi est, alicujus montis prope æquatorem constituti vices agere intelligamus, in utroque extremo arcus per promontorium ipsum transeuntis, quadrantis filum æquatorem versus aberrare debet, & magis quidem ubi æquatori est propius. Quo jam in cælo observatus arcus minuetur, & spatium uni gradui respondens in terra augebitur. Simili fere ratione cum in ea Pensilvaniæ Peninsula, quæ gradui observando patuit, Allegani montes ad boream, & ad occasum, mare autem atlanticum ad austrum, atque ad ortum jaceat, terrestris arcus mensura non nisi major pro gradu integro prodire poterat: ut nesciam quibus hypothesibus ex altitudine, ac distantia eorum montium, & ex oceani atlantici profunditate D. Cavendish in Transact. Philos. anni 1768 conjecerit gradum e contra hexapedis 60, aut 100 minorem prodiisse. Ad id saltem talem materiæ distributionem in ea peninsula excogitare oporteret ut versus medium observati arcus utrimque filum quadrantis deflecteretur.

Iisdem principiis ductus Cl. Liesganig §. 163. de dimensione graduum censuit altissimos Græcii montes, maxima ex parte metallo fœtos, gignere tantam illam differentiam graduum contiguorum: ac deinde §. 21. appendicis suspicatus est pingues metallorum massas intra telluris sinum a Stiriæ fodinis in Transilvaniam usque porrectas, mensuram etiam gradus Hungarici, qui adeo ab aliis diffidet, vitiare. Difficultatem insuper observationum prope Tibiscum institutarum in Cumaniæ regione exposuit Vir celeberrimus: nam & §. 4. ejusdem appendicis iniquitatem soli descripsit, qua ad gradum unum metiendum 26 triangulis fuit opus: & §. 8. tantam fuisse dixit densitatem vaporum ad altitudinem unius, aut alterius hexapedæ solo incumbentium, ut fere stagnantis aquæ speciem exhibuerint: cæli vero inclementiam tantam fuisse retulit, ut ex 27 diebus, quibus gradum metiri oportuit, 18 fuerint pluvii, nec nisi pluvia minus densa quandoque vapores deprimen-

M 2 te

te anguli observari melius potuerint. Cumque insuper gradus Hungaricus, & Pensilvanus etiam ab aliis omnibus nimium differant, nec nisi peculiarem aliquam inferiorum stratorum dispositionem indicare possint, Africanus vero non nisi minor, ac major Romanus gradus vere esse debeat quam ex observationibus prodierit, quatuor hisce gradibus sepositis, octo aliis, quos memoravimus, præcipue utemur ad curvaturam meridianorum, & totius Terræ figuram determinandam.

CAPUT PRIMUM.

DE DIMENSIONE GRADUUM, ET, QUÆ INDE COLLIGITUR, FIGURA TERRÆ.

PROBLEMA I.

SI meridiani omnes ellipseos figuram referant, & accedant proxime ad circulos, dato uno gradu, & data proportione semiaxium gradus alios determinare.

Positis omnibus, ut in Scholio Cap. I. Lib. II., prioris Partis, radius circuli, qui eamdem habeat curvitatem ellipseos in puncto quocumque M, fig. 23., erit $\frac{TV^2 . MP^3}{TA^4}$, eritque insuper quadratum normalis $MP^2 = \frac{TA^4}{TV^2} + \frac{\overline{TV^2 - TA^2} . MH^2}{TV^2}$. Fiat jam semiaxis minor ellipseos $TA = C$, major $TV = C + B$, & differentia utriusque B sit adeo exigua, ut possit negligi ipsius quadratum, sinus vero anguli VPM, quem normalis educta in puncto M cum majore axe intercipit, vocetur T, & sit propterea $MH^2 = MP^2 . T^2$. Sic fiet

$$MP^2 - \left(\frac{TV^2 - TA^2}{TV^2}\right) . MP^2 . T^2 = MP^2 . \left(1 - \frac{2B . T^2}{C}\right)$$

$$= \frac{TA^4}{TV^2} = \frac{C^4}{C^2 + 2C . B} = C^2 - 2C . B \text{ : atque inde eruetur}$$

$$MP^2 = \frac{C^2 - 2C . B}{1 - \frac{2B . T^2}{C}} = C^2 - 2C . B + 2C . B . T^2,$$

& ex-

& extracta radice erit normalis $MP = C - B + B.T^2$, & radius circuli ellipsim osculantis in puncto M

$$= \frac{C^2 - 2C\,B.MP^2}{C^2} = C - B + 3B.T^2.$$

Jam vero, si ellipsis accedat proxime ad circulum, manifestum est arcus similes, qui æquales angulos subtendunt, proportionales esse radiis circulorum eamdem curvitatem habentium cum ipsis arcubus. Itaque meridiani elliptici gradus proportionales erunt radiis osculi $C - B + 3B.T^2$, datoque uno gradu in distantia quavis proposita a majore axe, & datis quantitatibus C, & B gradus alii omnes in aliis quibuslibet distantiis determinari poterunt.

Corollarium I.

Quia posito $T = 0$, in ipso axe majore ellipseos, radius osculi est $C - B$, manifestum est radios circulorum eamdem habentium ellipseos curvitatem, & arcus etiam ellipticos eumdem angulum subtendentes, & gradus omnes in meridiano quovis elliptico, proxime ad circulum accedente, a majore ad minorem axem transeundo augeri in duplicata ratione sinus anguli VPM. Et si Terra sphæroidis circa polos compressæ, & ad æquatorem elatioris figuram habeat, atque accedat proxime ad sphæram, meridiani cujusvis arcus eumdem gradus unius angulum subtendentes ab æquatore pergendo ad polos augebuntur in duplicata ratione sinus latitudinis loci cujuslibet propositi, sive etiam in ratione simplici dimidii sinus versi latitudinis bis acceptæ.

Corollarium II.

Et quia sub polis, posito $T = 1$, fit radius osculi $C + 2B$, in hypothesi eadem Terræ sphæroidicæ, & accedentis proxime ad sphæram primus meridiani gradus erit ad ultimum ut $C - B : C + 2B$, & primus idem gradus ad differentiam primi, & ultimi erit quam proxime ut $C : 3B$, sive ut semiaxis minor ad triplam differentiam semiaxium. Quare si prior meridiani gradus ut antea statuatur hexapedarum Parisiensium 56753, & semiaxis majoris ad minorem proportio assumatur 231 : 230, quam inferius videbimus ad Terræ totius fluidæ, & homogeneæ, ac circa minorem axem diurno motu circumvolutæ æquilibrium requiri, erit differentia primi, & ultimi gradus hexap. 740. 5, & gradus ipse per polos transiens erit hexap. 57493. 5.

Co-

Corollarium III.

Quod si differentia omnis 740. 5 minuatur in duplicata ratione sinus latitudinis, & prior meridiani gradus assumatur 56753, undecim alii gradus, quos memoravimus, eorumque dissensus ab observationibus erunt ut in tabula sequenti

Meridiani Gradus		Quadratum sinus Latitudinis	Incrementa Graduum	Gradus toti	Gradus observati	Differentiæ observationum.
I.	Peruvianus	0.		56753	56753	
II.	Africanus	0. 301426	223	56976	57037	+ 61.
III.	Pensilvanus	0. 399461	295. 8	57048. 8	56888	— 160. 8
IV.	Romanus	0. 465412	344. 6	57097. 6	55979	— 118. 6
V.	Gallicus prior	0. 474122	351	57104	57048	— 56.
VI.	Taurinensis	0. 495346	366. 8	57119. 8	57137. 8	+ 18.
VII.	Alter Gallicus	0. 507272	375. 6	57128. 6	57050	— 78. 6
VIII.	Hungaricus	0. 512578	379. 5	57132. 5	56881	— 251. 5
IX.	Viennensis	0. 564687	418	57171	57086	— 85.
X.	Parisiensis	0. 576205	426. 6	57179. 6	57074	— 105. 6
XI.	Bataviens	0. 622371	460. 8	57213. 8	57145	— 68. 8
XII.	Lapponicus	0. 838866	621	57374	57405	+ 31.

Corollarium IV.

Pariter cum meridiani gradus in latitudine, cujus sinus sit T, ad priorem gradum se habere debeat ut $C - B + 3B.T^2 : C - B$, erit gradus idem propositus ad excessum supra gradum priorem ut $C - B + 3B.T^2 : 3B.T^2$: atque ita a gradu quolibet exordiendo primus, & ultimus meridiani gradus, ac deinde alii omnes intermedii eadem ratione determinari poterunt. Ita si gradus ille proponantur qui prope Pirenæos montes in Galliis observari potuit, retenta eadem proportione semiaxium, prodibit differentia hexapedarum 353, & fiet primus meridiani gradus hexap. 56695, hexapedis scilicet 58 minor quam antea assumptum fuerat.

Corollarium V.

Ubi statuamus primum meridiani gradum hexapedis 50 deficere, atque esse tantum 56703., & semiaxis major telluris ad minorem se habeat ut 231 : 230, erit differentia primi, & ultimi gradus hexap. 739. 5, & gradus alii iisdem approximationibus eruentur, ut in tabula sequenti

Me-

Meridiani gradus		Incrementa	Gradus toti	Gradus obſervati	Differentiæ.
I.	Peruvianus		56703	56753	+ 50
II.	Africanus	223	56926	57037	+ 111
III.	Penſilvanus	295.4	56998.4	56888	− 110.4
IV.	Romanus	344.2	57047.2	56979	− 67.8
V.	Gallicus prior	350.6	57053.6	57048	− 5.4
VI.	Taurinenſis	366.3	57069.3	57137.8	+ 68.5
VII.	Alter Gallicus	375.1	57078.1	57050	− 28.1
VIII.	Hungaricus	379	57082	56881	− 201
IX.	Viennenſis	417.5	57120.5	57086	− 34.5
X.	Pariſienſis	426	57129	57074	− 55
XI.	Batavicus	460	57163	57145	− 18
XII.	Lapponicus	620	57323	57405	+ 82

PROBLEMA II.

Datis duobus gradibus meridiani elliptici, ac proxime circularis, invenire proportionem ſemiaxium.

Reaſſumptis formulis problematis alterius præcedentis, ob conſtantes TV, & TA erit radius oſculi in puncto quolibet meridiani elliptici proportionalis cubo normalis MP, quæ in puncto eodem perimetri educitur. Et cum ſit inſuper

$$MP^2.(TV^2-\overline{TV^2-TA^2}.T^2)=TA^4,$$

$$MP^2=\frac{TA^4}{TV^2.\overline{1-T^2}+TA^2.T^2}.$$

erit in puncto quolibet radius oſculi in ratione reciproca ſeſquiplicata quantitatis $TV^2.\overline{1-T^2}+TA^2.T^2$. Denique cum arcus eumdem gradus unius angulum ſubtendentes proportionales ſint radiis oſculi, ſi menſura unius gradus vocetur G, & T ſinus latitudinis, ſumatur vero gradus quicumque alter E æquatori propior, & ſinus latitudinis ſit S, erit

$$G:E=(TV^2.\overline{1-S^2}+TA^2.S^2)^{\frac{3}{2}}:(TV^2.\overline{1-T^2}+TA^2.T^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Quod ſi fiat igitur $TV=C+B$, $TV-TA=B$, & differentia ſemiaxium B ut antea exigua ſit, erit

$$TV^2-\overline{TV^2-TA^2}.T^2=TV^2-2C.B.T^2$$

$$(TV^2-\overline{TV^2-TA^2}.T^2)^{\frac{3}{2}}=TV^3-3TV.C.B.T^2,$$

aliiſque neglectis terminis erit quam proxime

$$G:E=TV-3B.S^2:TV-3B.T^2,$$

$$\frac{B}{TV}=\frac{B}{C+B}=\frac{G-E}{3G.T^2-3E.S^2}.$$

Co-

COROLLARIUM I.

Ex priori analogia eruetur illico

$$G^{\frac{2}{3}} : E^{\frac{2}{3}} = TV^2 - \overline{TV^2 - TA^2}.S^2 : TV^2 - \overline{TV^2 - TA^2}.T^2,$$

& si extremi, ac medii analogiæ hujus termini ducantur in se invicem, & æquatio rursus in aliam analogiam resolvatur, facile patebit in qualibet sphæroide semiaxem majorem TV ad minorem semiaxem ΓA esse oportere in ratione subduplicata quantitatis

$G^{\frac{2}{3}}.T^2 - E^{\frac{2}{3}}.S^2 : E^{\frac{2}{3}}.\overline{1 - S^2} - G^{\frac{2}{3}}\overline{1 - T^2}$. Et si gradus E assumatur sub æquatore, & sit $S = 0$, fiet etiam ex posteriori hac formula

$$\frac{C+B}{C} = \frac{G^{\frac{1}{3}}T}{\sqrt{(E^{\frac{2}{3}} - G^{\frac{2}{3}}.\overline{1 - T^2})}},$$

ex priori vero $\frac{B}{C+B} = \frac{G-E}{3GT^2}$.

COROLLARIUM II.

Si meridiani gradus assumantur ut ex observationibus prodierunt, atque ope formulæ posterioris prior gradus comparetur cum aliis omnibus excepto Hungarico, & differentia semiaxium unitate exprimatur, ex singulis combinationibus prodibit semiaxis major ut in tabula sequenti

	Ordo combinationum	Semiaxis major
I.	ex gradu primo, & secundo.	181.6.
II.	ex primo, & tertio.	505.
III.	ex primo, & quarto.	353.
IV.	ex primo, & quinto.	275.
V.	ex primo, & sexto.	220.7.
VI.	ex primo, & septimo.	292.3.
VII.	ex primo, & nono.	290.4.
VIII.	ex primo, & decimo.	307.4.
IX.	ex primo, & undecimo.	270.
X.	ex primo, & duodecimo.	221.6.

COROLLARIUM III.

Quod si ope alterius formulæ $\frac{B}{C+B} = \frac{G-E}{3G.T^2 - 3E.S^2}$ postremus gradus comparetur cum aliis omnibus, excepto Hungarico, decem aliæ combinationes habebuntur

Ordo

Ordo combinationum.		Semiaxis major.
XI.	ex duodecimo, & primo.	221.6.
XII.	ex duodecimo, & ſecundo.	252.4.
XIII.	ex duodecimo, & tertio.	147.6.
XIV.	ex duodecimo, & quarto.	152.
XV.	ex duodecimo, & quinto.	177.4.
XVI.	ex duodecimo, & ſexto.	222.9.
XVII.	ex duodecimo, & ſeptimo.	162.4.
XVIII.	ex duodecimo, & nono.	150.
XIX.	ex duodecimo, & decimo.	138.4.
XX.	ex duodecimo, & undecimo.	145.

COROLLARIUM IV.

Si differentia ſemiaxium ut antea exprimatur unitate, accipiaturque medium ex decem prioribus combinationibus, quæ priorem gradum meridiani cum decem aliis ſubſequentibus comparando exſurgunt, prodibit ſemiaxis major 291. 7. Et ſimili modo ſi accipiatur medium ex decem aliis combinationibus poſtremi, ac decem aliorum graduum præcedentium, erit ſemiaxis idem 176. 9: & medium ſimul ex omnibus erit 234. 3. His vero ſimili ratione addi poterunt quatuor combinationes, neglectis aliis, quæ ex gradibus propioribus exſurgerent.

Ordo combinationum.		Semiaxis major.
XXI.	ex undecimo, & ſexto	301.6.
XXII.	ex undecimo, & quinto	261.3.
XXIII.	ex undecimo, & tertio	150.
XXIV.	ex decimo, & tertio	163.9.

quarum quatuor combinationum medium eſt 219.2. Medium autem ex omnibus viginti quatuor erit 231. 7.

COROLLARIUM V.

Quod ſi vero non Hungaricus tantum, ſed Penſilvanus etiam, Africanus, & Romanus, ut antea diximus, ſecundus nimirum, tertius, & quartus gradus excludantur, utpote qui ob attractionem montium, & inæqualem materiæ in ſuperficie terreſtri diſtributionem, ſuſpecti aliqua ex parte eſſe debent, quindecim tantum combinationes ſupererunt ad mediam terræ ellipticitatem eruendam præcipue idoneæ, nimirum IV., V., VI., VII., VIII., IX.,

X., XV., XVI., XVII., XVIII., XIX., XX., XXI., & XXII. Ex iis vero ſemiaxis major prodibit 229.1. Unde cum tanta ſit differentia ellipticitatum, quæ prodeunt obſervatos omnes meridiani terreſtris gradus comparando inter ſe invicem, medio tamen ex omnibus accepto, qui ob majorem latitudinum differentiam, minoreſque ſuperficiei irregularitates, determinandæ telluris formæ aptiores videri debent, fere eadem prodit ellipticitas, quam in corollariis prioris problematis aſſumpſimus, & qua poſita obſervati gradus non majori quantitate a veris differunt, quamquæ in exiguos obſervationum errores refundi poteſt.

Problema III.

Datis in ſphæroide oblata, & accedente proxime ad ſphæram, duobus gradibus circulorum æquatori parallelorum, invenire proportionem ſemiaxium.

Cum in ellipſi AV*av*, fig. 23., eſſe debeat $MR^2 = \frac{TV^2 . \overline{TA^2 - RT^2}}{TA^2}$, & poſito quod T ſit ſinus anguli VPM, juxta Probl. I., eſſe etiam debeat $RT^2 = MH^2 = MP^2 . T^2 = C^2 . T^2 - 2C.B.\overline{1 - T^2}.T^2$, ſi ſphærois gignatur revolutione ellipſeos AV*av* circa minorem axem A*a*, erit in puncto M, & in latitudine quavis VPM radius MR circuli ad æquatorem, paralleli $\frac{TV}{TA}.(C^2.\overline{1 - T^2} + 2C.B.\overline{1 - T^2}.T^2)^{\frac{1}{2}}$, ſeu proxime

$$TV.\sqrt{(1 - T^2)} + \frac{TV}{TA}.B.\sqrt{(1 - T^2)}.T^2.$$ Fiat $\sqrt{(1 - T^2)} = \text{ſ}$,

ſeu ſit ſ coſinus latitudinis puncti M, & gradus paralleli circuli in eadem latitudine vocetur F. Sit etiam H gradus paralleli alterius in latitudine, cujus coſinus ſit s. Subſtituendo ut antea C loco TA, & C + B loco TV fiet

$$F : H = \overline{C + B}.\text{ſ} + B.\text{ſ}.\overline{1 - \text{ſ}^2} : \overline{C + B}.s + B.s.\overline{1 - s^2}$$
$$= \overline{C + 2B}.\text{ſ} - B.\text{ſ}^3 : \overline{C + 2B}.s - B.s^3$$
$$= \text{ſ} - \frac{B.\text{ſ}^3}{C + 2B} : s - \frac{B.s^3}{C + 2B}.$$

Ex

Ex hac autem analogia facile eruetur

$$\frac{B}{C+2B} = \frac{F.s - H.ſ}{\overline{F.s^2 - H.ſ^2}} :$$

atque inde etiam colligetur

$$\frac{B}{C+B} = \frac{F.s - H.ſ}{H.ſ.\overline{1-ſ^2} - F.s.\overline{1-s^2}} .$$

Corollarium I.

Cum radius meridianum oblatæ sphæroidis osculans in ipsa æquatoris intersectione V sit $\frac{TA^2}{TV}$, ut etiam in scholio Cap. I. Lib. II. prioris partis notatum est, & æquatoris radius sit TV, erit prior meridiani gradus ad gradum quemlibet æquatoris in duplicata ratione semiaxis minoris ad majorem. Quare si primus meridiani terrestris gradus assumatur, ut ex observationibus prodiit, hexapedarum Parisiensium 56753, & in hypothesi Terræ sphæroidicæ, & accedentis proxime ad sphæram semiaxis major se habeat ad minorem ut 231 : 230, erit æquatoris gradus hexapedarum 57247. Hoc dato erit æquatoris totius ambitus hexap. 20608920 : æquatoris radius hexap. 3280108, sive milliarium italicorum 4293 $\frac{1}{7}$, milliari unicuique tribuendo hexapedas 764. Erit etiam semiaxis minor telluris hexap. 3265909., & differentia altitudinum supra centrum sub polis, & æquatore erit hexap. 14199, sive milliarium 18 $\frac{1}{2}$. Denique radius Terræ mediocris censeri poterit hexap. 3273008 $\frac{1}{2}$.

Corollarium II.

At insuper positis hisce omnibus cum æquatoris totius ambitus diurno motu absolvatur tempore 23^{h} 56$'$ 4$''$, sive 86164$''$, erit arcus uno minuto secundo temporis absolutus pedum 1435 : cujus spatii quadratum divisum per æquatoris diametrum dabit sinum versum ejusdem arcus pedum 0.05234, sive lin. 7.537. Et quia, juxta §. XXIX. Introductionis prioris partis, quadratum diametri est ad quadratum peripheriæ ut dimidia longitudo penduli uno secundo oscillantis ad spatium uno secundo temporis libero absolu-

folutum, fi tota penduli uno fecundo ofcillantis longitudo fub æquatore, & in ipfa maris libella affumatur linearum 439.21, ut ferunt obfervationes, erit fpatium libero lapfu confectum uno fecundo temporis linearum 2167.41, & ad fpatium, quod eodem tempore ob vim centrifugam poffet confici, fe habebit ut 2167410:7537, five ut $287 \frac{1}{2}:1$. Itaque pondus corporum fub æquatore fe habebit ad vim centrifugam ut $287 \frac{1}{2}:1$, abfoluta autem gravitas erit ad vim centrifugam ut $288 \frac{1}{2}:1$.

Corollarium III.

Jam vero juxta problematis hujus formulas æquatoris gradus ad gradum paralleli circuli in latitudine, cujus finus fit T effe debet ut

$$TV:\overline{TV+B.T^2}.\surd(1-T^2)=1:\overline{1+\frac{B.T^2}{C}}.\surd(1-T^2).$$

Quare fi æquatoris terreftris gradus, ut in Coroll. I., affumatur hexapedarum 57247, & minor femiaxis Terræ ad majorem fe habeat ut 230:231, inquiraturque, qui paralleli gradus effe debeat in latitudine 43° 32', factis fubftitutionibus prodibit gradus hujufmodi hexapedarum 41588, minor fcilicet hexapedis 30, quam qui ex obfervationibus prodierat, atque intra eos limites erit diffenfus, intra quos obfervationes ipfæ certiores effe non poffunt.

Problema IV.

Dato gradu paralleli alicujus circuli, & dato gradu alio meridiani in fphæroide oblata, & accedente proxime ad fphæram invenire proportionem femiaxium.

Sit G meridiani gradus, F vero gradus paralleli circuli, & cofinus latitudinis illius quidem fit r, hujus autem s. Si femiaxis minor ut antea vocetur C, & differentia majoris, ac minoris B, radius circuli meridianum ofculantis in latitudine propofita juxta prioris problematis formulas erit $C-B+3B.T^2$, five $C+2B-3B.r^2$: & juxta formulas tertii problematis radius paralleli circuli erit quam proxime $\overline{C+2B}.s-B.s^3$. Quia igitur in fphæroide accedente proxime ad fphæram meridiani, & paralleli cujufvis gradus effe debent in ratione eadem radiorum, erit etiam

$$G:F=1-\frac{3B.r^2}{C+2B}:s-\frac{Bs^3}{C+2B}.$$

Ex hac

Ex hac vero analogia facile eruetur

$$\frac{B}{C+2B} = \frac{F - G.s}{3F.ſ^2 - G.s^2}$$

$$\frac{B}{C+B} = \frac{F - G.s}{F.\overline{3ſ^2 - 1} + G.s.\overline{1 - s^2}}$$

Corollarium I.

Si fiat $ſ = 1$, & gradus G accipiatur ſub æquatore, poſterior formula abibit in hanc aliam $\frac{B}{C+B} = \frac{F - G.s}{2F + G.s.\overline{1 - s^2}}$: atque ita ſi primus meridiani terreſtris gradus, ab æquatore incipiendo, aſſumatur hexapedarum 56753, atque in latitudine 43° 32' paralleli gradus aſſumatur hexap. 41618, ſcilicet ſi ſit $s = 0.72497$, $F = 41618$, $G = 56753$, fiet $\frac{B}{C+B} = \frac{1}{216.8}$. In hoc igitur formularum genere differentia hexapedarum 30, juxta antecedens corollarium ſufficiet ut ellipticas ab $\frac{1}{231}$ ad $\frac{1}{216.8}$ traducatur.

Corollarium II.

Si paralleli, & meridiani gradus ſub eadem latitudine accipiantur, comparenturque inter ſe invicem, & ſit $ſ = s$, fiet

$$\frac{B}{C+B} = \frac{F - G.s}{F.\overline{3s^2 - 1} + G.s.\overline{1 - s^2}} :$$

unde ſi manentibus cæteris, quæ antea, gradus G in latitudine 43° 32' aſſumatur hexapedarum 57048, prodibit $\frac{B}{C+B} = \frac{1}{168}$ circiter. Si gradus ipſe in eadem latitudine aliquanto major aſſumeretur, ut ex menſuris Taurinenſibus poſſet colligi, minor e contra prodiret ſemiaxium differentia.

Corollarium III.

Dato autem paralleli gradu F, & coſinu s latitudinis, quo major fiet gradus meridiani G, ab æquatore ſcilicet pergendo ad polos,

polos, eo propius ad æqualitatem accedent quantitates F, & G.s: atque ita exiguus etiam error, qui in obſervandis gradibus ſubrepſerit, longe diverſam ellipticitatem, & proportionem ſemiaxium exhibere poterit. In hiſce igitur caſibus magis ſuſpectæ erunt formulæ, & minus certi, qui ex ipſarum applicatione eruentur numeri: nec quiſpiam hærere debet, quodcum eumdem paralleli gradum gradui Lapponico comparando quantitates F, & G.s, ut ex obſervationibus primum prodierunt, ſint proxime inter ſe æquales, quæ exſurgit ellipticitas negativo ſigno afficiatur, & ſphæroidem ad polos oblongam referat.

Scholion.

Ex hoc itaque generali proſpectu patet quid ex obſervationum omnium comparatione, independenter a quibuſvis aliis primitivæ fluiditatis, æquilibrii, & denſitatis interni telluris nuclei hypotheſibus directe colligatur. Primo ſcilicet iis ſepoſitis menſuris, quæ inæqualitate attractionis materiei in terreſtri ſuperficie inæqualiter diſpoſitæ debebant affici, ſi Peruvianus, Taurinenſis, Gallici gradus, & Viennenſis etiam, ac Batavicus, & Lapponicus comparentur inter ſe invicem, varia quidem ex ſingulis combinationibus emergit ſemiaxium Terræ proportio, media tamen ex omnibus accepta, minor ſemiaxis Terræ, qui per polos tranſit, ad æquatoris radium ſe haberet ut 229:230, nec niſi aliquanto minus ſemiaxes bini differrent inter ſe invicem ſi gradus etiam Penſilvani, & Romani inſuper, atque Africani in combinationibus hiſce omnibus ratio haberetur ut in Coroll. IV., & V. Probl. II. dictum eſt. Deinde ſi utriuſque ſemiaxis ratio aſſumatur 230:231, inquiraturque qui gradus ſinguli, & qui in ſingulis obſervationum error, diſſenſuſque eſſe poſſit, paralleli gradus in lat. 43° 32', & octo alii gradus meridiani, unico dumtaxat excepto, ſcilicet aut Pariſienſi, aut Lapponico intra eos limites congruent, qui obſervationum diligentiam definiunt, prout ſcilicet aut Peruvianus, & Taurinenſis, aut prior Galliarum gradus aſſumantur ut ex obſervationibus prodierunt. Id patet ex Coroll. III. Probl. III., & Coroll. III., & V. Probl. I. Quod ſi, ut in corollario eodem quinto, ſtatuamus in Peruviani gradus determinatione hexapedis 50 exceſſu peccatum eſſe, retenta eadem proportione ſemiaxium, in Lapponico gradu error hexapedarum 82 pariter exceſſu habebitur, & Pariſienſis gradus 55 hexapedis deficiet, alii vero Gallici gradus, & Viennenſis, Taurinenſiſque, ac Batavicus, Romanuſque etiam exceſſu, defectuque intra arctiores errorum limites conſiſtent. Summa etiam errorum om-

nium,

nium, ac correctionum, sive positivarum, sive negativarum, novem omnibus iisdem gradibus comparatis inter se invicem non nisi ad hexapedas $\pm$ 110 circiter ascendet. Ea igitur facta distributione singulare erit: primo quod ab æquatore pergendo ad polos meridiani terrestris gradus augeantur in duplicata ratione sinuum latitudinis, ut sphæroidis oblatæ forma, & assumpta ellipticitas $\frac{1}{231}$ postulat: deinde quod summa omnium positivarum correctionum proxime æqualis sit summæ omnium negativarum, ut postulat æqualis probabilitas in singulis deviationibus, erroribusque observatorum ad gradus augendos, minuendosque: quod idem valebit etiam si gradus Africani, & Pensilvani, Hungarico tantum seposito, habeatur ratio. Denique tribus simul sepositis hisce gradibus singulare erit quod summa correctionum aliarum omnium tum positivo cum negativo signo acceptarum, non tantum sit omnium minima, verum etiam ad eos limites accedat, quos certitudini observationum, observatorumque diligentiæ assignavimus. Ita enim gradus Lapponicus dumtaxat aliquot hexapedis ultra ipsos limites excurreret; infra autem consisterent quatuor omnes, quos memoravimus, Galliarum gradus, & Batavicus etiam ac Viennensis. Taurinensis gradus, ut primo evulgatus est, omnino congruet: & ex nuperrimis correctionibus acceptus tantumdem excessu differet quantum Romanus gradus deficiet, hexapedis scilicet 68. Romanus vero actione montium utrique extremo interjacentium non nisi minor, Taurinensis ob montes positos ex uno latere Andratas versus non nisi major prodire poterat. Inde majoribus differentiis abluderent Africanus, & Pensilvanus gradus dumtaxat, quorum determinatio ob inæqualem materiæ terrestris dispositionem sensibiliter debebat affici, atque insuper gradus Hungaricus, qui satis certe, & accurate determinari non potuit, atque alias interiorum telluris partium irregularitates indicare videretur. Itaque observationibus simul ombus collectis, consideratis, comparatisque inter se invicem statui poterit mediam superficiem telluris proxime esse sphæroidicam, & semiaxem minorem, qui per polos transit, ad æquatoris radium esse quam proxime ut 230 : 231. Modo videndum superest quibus interioris nuclei hypothesibus experimenta pendulorum, & terrestrium ponderum phænomena cum eadem proportione semiaxium possint conciliari. Hæc figuræ terrestris investigandæ methodus videtur rectior, quam si media semiaxium ratio, quæ experimentis ipsis respondet ex hypothesibus æquilibrii fluidarum partium, densitatis-

fitatifque interioris nuclei colligeretur, & quæreretur poſtmodum quæ minima graduum omnium correctio adhibenda fit ut erroribus poſitivis ac negativis ſe compenſantibus gradus omnes ad ſupputatam meridianorum terreſtrium ellipticitatem reduci poſſint. Cum enim obſervationes graduum, dimenſioneſque curvaturam meridianorum independenter ab aliis hypotheſibus exhibeant ut vere eſt, ad figuram Terræ determinandam videntur opportuniores quam quæ cum hypotheſibus ipſis diverſimode combinari, atque explicari poſſunt, pendulorum experimenta. Deinde non omnes quidem obſervationes graduum indifferenter ad curvaturam meridianorum determinandam adhiberi debent, ſed quæ locorum, reductionumque omnium ratione habita videntur accuratiores. Denique in ſingulis gradibus juxta probabilitatum regulas corrigendis curandum eſt non tantum ut ſumma correctionum omnium ſit minima, atque ut ſimul omnes, & quæ poſitivæ, & quæ negativæ ſunt ſe ſe invicem compenſent, verum etiam ut ſingulæ intra limites illos conſiſtant, qui diligentiæ obſervatorum, obſervationumque certitudini poſſunt ſatis probabiliter aſſignari.

CAPUT SECUNDUM.

DE ÆQUILIBRIO PARTICULARUM OMNIUM SE SE TRAHENTIUM.

Theorema I.

SI ad puncta ſingula ſolidorum ſimilium quorumcumque ABC, *abc*, fig. 24., tendant æquales vires centripetæ creſcentes, & decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum reciproce, atque inſuper rectæ AD, *ad*, & particulæ A, *a* ſimiliter in ſuperficie ſolidorum ſint poſitæ, eorumdem vires ſecundum rectas ipſas AD, *ad* exercitæ proportionales erunt homologis lateribus AB, *ab*.

Dividi intelligantur duo ſolida in particulas quotcumque ſimiles, & ſimiliter poſitas G, *g*, quarum ſcilicet maſſæ ſint integris ſolidis proportionales: adeoque ſint particulæ G, *g* in triplicata ratione laterum homologorum, diſtantiæ vero AG, *ag* ſint in ratione ſimplici eorumdem laterum: ductiſque ad rectas AD, *ad* perpendiculis GF, *gf* ſit ſemper AG:AF = *ag*:*af*. Quia vires accele-

celeratrices sunt massis attrahentibus directe, & quadratis distantiarum reciproce proportionales, vires etiam particularum G, *g* secundum AG, *ag* exercitæ erunt directe ut cubi, & reciproce ut quadrata homologorum laterum, sive erunt in ratione simplici laterum AB, *ab*, atque ob datam rationem AG:AF, & *ag*:*af* vires etiam exercitæ secundum AD, *ad* erunt ut eadem latera AB, *ab*. Quod cum pro singulis particulis similibus locum habeat, totæ vires, quæ in A, *a* agent secundum AD, *ad* erunt homologis lateribus AB, *ab* proportionales.

Corollarium.

Quia vires secundum AB, & AD exercitæ universim sunt inter se ut AG:AF, atque immutato angulo BAD variantur ipsæ in ratione simplici cosinus ejusdem anguli, universim etiam attractiones pyramidum, conorum, solidorum similium quorumcumque ABC, *abc* secundum quascumque rectas AD, *ad* inter se erunt in ratione composita ex simplici homologorum laterum AB, *ab*, ac pariter ex simplici cosinus angulorum BAD, *bad*, quos homologa eadem latera cum rectis propositis intercipiunt.

Theorema II.

Iisdem positis attractrices vires sphæræ, aut sphæroidis cujuslibet homogeneæ a superficie pergendo directe ad centrum erunt distantiis a centro ipso proportionales.

Sit sphærois aliqua revolutione ellipseos AV*av*, fig. 25., circa axem A*a* descripta, & similis, ac concentrica sphærois sit U*du*, ac per punctum quodcumque *d* traducantur rectæ FH, *fh*, quæ æqualem utrimque angulum F*df*, H*dh* circa idem punctum constituant. Si angulus ipse minuatur ut rectæ *d*F, *df*, ac pariter *d*H, *dh* inter se æquales censeri possint, similes erunt oppositæ pyramides F*df*, H*dh*, ac per antecedens theorema erunt attractrices vires pyramidum altitudinibus *df*, *d*H proportionales. At quia ob similitudinem ellipsium circa idem centrum descriptarum æquales sunt rectæ FM, *d*H; differentia attractionum oppositarum proportionalis erit interceptæ M*d*, ac se invicem destruent attractiones pyramidis *d*H*h*, & frusti FM*mf*, & perinde se habebit punctum *d* ac si a sola pyramide *d*M*m* attraheretur. Quod cum pro singulis pyramidibus locum habeat, quæ conversa utcumque recta FH, & *fh* in sphæroide AV*av* possunt concipi, & quarum communis vertex sit *d*, sola interior sphærois M*ud* supererit, quæ

punctum idem d ad centrum attrahat. At cum puncta D, d in superficie sphæroidum similium similiter sint posita, si sphærois utraque in totidem similes pyramides, & similiter positas resolvatur, patebit etiam ex antecedenti theoremate pyramidum homologarum, totarumque adeo sphæroidum attractiones ad centrum T esse homologis semidiametris DT, dT proportionales. Itaque a superficie sphæræ, aut sphæroidis cujuslibet accedendo directe ad centrum attractrices vires minuentur in ratione simplici distantiarum.

Corollarium I.

Cum tota recta FH, quæ in ellipsi FvH utcumque ducitur, & portio ipsius Md, quæ abscinditur ellipsi simili, & similiter posita Mud, bifariam dividantur in eodem puncto n, æqualesque sint interceptæ FM, dH; manifestum est strati cujuslibet sphæroidici superficiebus similibus AVav, UMud terminati attractrices vires in punctum quodcumque n spatii interioris Mud exercitas se invicem destruere: quo dato si interius spatium omni materia vacuum intelligatur, corpusculum ubilibet interius positum in neutram partem attrahetur, & quiescet.

Corollarium II.

Si ellipsis AVav circa invariabilem axem Aa volvatur, & interim axis alius Vv ita varietur ut puncta extrema V, v non circulum, sed ellipsim aliam describant, atque ita gignatur solidum, quod simul oblatum, & oblongum sit; patebit simili modo attractrices vires accedendo ad centrum imminui in simplici ratione distantiarum. Cum enim sint ellipticæ omnes sectiones plano transeunte per Aa factæ, si sit solidum aliud simile, ac concentricum, cujus superficies transeat per punctum d, ut antea ostendi poterit vires particularum omnium extra solidum ipsum jacentium se invicem destruere, & solum interius solidum, quod punctum d attrahat, superesse.

Theorema III.

Si in eodem plano sint bini circuli concentrici RFH, ASM, fig. 26., & 27., ac circulus interior a recta Mr tangatur in puncto R, uterque autem nutando circa Mr binos cuneos efficiant, quorum particulæ singulæ se se attrahant in ratione duplicata reciproca distantiarum; vires, quibus particulæ R, & M trahentur perpendiculariter ad rectam Mr, æquales erunt inter se.

Ex

Ex punctis enim M, & R ducantur rectæ MS, MN, & & RF, RH utrimque æqualiter inclinatæ ad rectas alias ML, RG tangenti Mr perpendiculares, atque insuper per rectas illas ducantur totidem plana circuli utriusque plano RFH perpendicularia. Manifestum est iis planis in utroque cuneo secari oportere triangula totidem similia: unde æqualibus semper angulis circa puncta M, R inclinando rectas MS, MN, & RF, RH normalibus iis planis, & triangulis semper similibus dividetur uterque cuneus in binaria numero æqualia pyramidum similium: junctaque FVH, & ductis SP, Np ad ML perpendicularibus, erit 2RV attractio pyramidum RF, RH in punctum R, attractio autem pyramidum MS, MN in punctum M erit $MP \pm Mp$, prout scilicet puncta P, p jacebunt in eamdem, aut in adversas partes cum puncto M. Est autem $\frac{MS}{AB}$ sinus semisummæ duorum arcuum ML, LS æqualis sin. $\frac{1}{2}$ ML. cos. $\frac{1}{2}$ LS + cos. $\frac{1}{2}$ ML. sin. $\frac{1}{2}$ LS: & punctis P, p jacentibus ad eamdem partem cum puncto M, fig. 26., sinus $\frac{MN}{AB}$ semidifferentiæ arcuum ML, LS est sin. $\frac{1}{2}$ ML. cos. $\frac{1}{2}$ LS — cos. $\frac{1}{2}$ ML. sin. $\frac{1}{2}$ LS: punctis autem iisdem in fig. 27. jacentibus ex parte adversa semidifferentiæ sinus est cos. $\frac{1}{2}$ ML. sin. $\frac{1}{2}$ LS — sin. $\frac{1}{2}$ ML. cos. $\frac{1}{2}$ LS. Erit itaque in casu utroque $MS \pm MN = 2AB$. sin. $\frac{1}{2}$ ML. cos. $\frac{1}{2}$ LS $=$ 2 ML. cos. $\frac{1}{2}$ LS $=$ 2RG. cos. FRG $=$ 2RF: & cum sit insuper $MS \pm MN : MP \pm Mp = RF : RV$, erit etiam $MP \pm Mp = 2RV$: adeoque attractio pyramidum RF, RH in punctum R semper æqualis erit attractioni pyramidum MS, MN in punctum M, & tota cunei utriusque attractio in punctum M perpendiculariter ad Mr exercita erit æqualis.

COROLLARIUM.

Si bini circuli concentrici in planum aliud orthogonaliter projiciantur, quod transeat per Mr, hoc est si ex punctis singulis circulorum in planum aliquod propositum ducantur totidem lineæ perpendiculares; prodibunt binæ ellipses similes, ac concentricæ; eruntque singulæ RV, MP, Mp in circulis ad singulas lineas analogas in ellipsibus in constanti ratione sinus totius ad cosinum inclinationis plani circularis, & plani alterius, in quo projectio orthogonaliter fieri intelligitur: adeoque si duobus circulis substituantur binæ ellipses similes, ac concentricæ, adhuc erit $MP \pm Mp = 2RV$,

attractionesque utriusque pyramidum binarii semper æquales erunt inter se; & tota etiam attractio puncti R in cuneum plano RHF circulari, aut elliptico designatum æquabitur attractioni puncti M secundum ML in cuneum designatum plano MLr circulari pariter, aut elliptico.

THEOREMA IV.

Iisdem positis si proponatur sphærois revolutione ellipseos AVav, fig. 23., circa axem Aa genita, & ex puncto quocumque M in axes binos Aa, Vv ducantur perpendicula MR, MH; vis omnis, qua punctum M secundum MH trahetur, æqualis erit attractioni puncti R, & vis, qua punctum idem trahetur secundum MR, æqualis erit attractioni puncti alterius H.

In primis ex conicorum elementis patet quod si sint binæ sphæroides similes, ac concentricæ, & similiter positæ, ac per commune ipsarum centrum traducatur aliquod planum; sectiones sphæroidis utriusque erunt ellipses binæ inter se similes. Patet secundo ex ipsis elementis, quod in eadem sphæroide sectiones planis parallelis factæ sunt ellipses pariter similes inter se. Ex quibus duobus tertium consequitur, quod si recta MRr tangat sphæroidem aliam propositæ similem, ac similiter positam, descriptamque axibus Rr, Uu, traducto per eamdem tangentem quocumque plano sectiones sphæroidis utriusque similes erunt binis sectionibus, quæ parallello plano per centrum traducto possent utrobique effici, adeoque sectiones illæ erunt ellipses binæ similes inter se. Quod si insuper prius illud planum circa rectam Mr nutando cuneos binos efficiat superficiebus duarum sphæroidum terminatos, per corollarium superius, tota attractio puncti R in cuneum plano RHF, fig. 27., in sphæroide interiore designatum æquabitur attractioni puncti M secundum ML in cuneum plano MBr sectum: atque id quidem cum locum habeat pro cuneis singulis hinc inde æqualiter dissitis a plano ellipseos genitricis, in quos sphærois proposita resolvi potest; tota attractio puncti M in superficie sphæroidis positi secundum rectam MH æqualis erit vi omni, qua punctum R trahetur ad centrum T. Simili modo per rectam MH traductis quotcumque planis ostendi poterit vim particulæ ejusdem M secundum MR æquari attractioni puncti alterius H.

Co-

Corollarium I.

Quia per Theor. II. attractrices vires sphæroidis a superficie pergendo directe ad centrum minuuntur in simplici ratione distantiarum, attractrices vires perpendiculares axi Aa in singulis punctis M erunt similiter proportionales distantiis HT, aut MR ab axe ipso, & vires perpendiculares plano æquatoris proportionales erunt distantiis RT, MH a plano ipso; binæ autem eædem vires inter se erunt in ratione composita absolutarum virium in polo A, & æquatore V agentium, quantitatumque $\frac{HT}{VT}$, $\frac{RT}{AT}$.

Corollarium II.

Si oblata simul, & oblonga sit sphærois, ut in Coroll. II. Theor. II. proponebatur, simili modo ostendi poterit vires puncti M secundum MH, MR æquales esse attractionibus punctorum R, & H. Nam si solidi alterius similis, ac concentrici superficies transeat punctum R, sectiones utriusque solidi interioris, exteriorisque, & quæ plano per centrum transeunte, & quæ planis aliis parallelis fient, erunt ellipses similes inter se: unde facile colligetur planum per chordam Mr traductum secare, in utroque solido ellipses similes, & vires puncti M secundum MH, MR æquales esse atttactionibus punctorum R, & H.

Theorema V.

Si sphærois $AVav$ constet fluido homogeneo, cujus particulæ omnes æquales M gravitent in se invicem viribus æqualibus decrescentibus in duplicata ratione auctarum distantiarum, & præterea sollicitentur viribus aliis quibuscumque, quarum directio sit perpendicularis aut axi Aa, aut æquatoris plano Vv, quæque proportionales sint aut distantiæ MR ab axe, aut distantiæ MH a plano æquatoris, ac si insuper semiaxes AT, VT ellipseos genitricis sint reciproce proportionales viribus totis agentibus in A, & V; vis omnis composita puncti M dirigetur secundum MP ellipsi normalem in puncto M, atque erit normali eidem proportionalis.

Quia per corollarium primum antecedentis theorematis attractrices vires perpendiculares axi sunt proportionales distantiis ab ipso axe, & vires æquatori perpendiculares sunt proportionales distantiis ab æquatore, atque insuper juxta hypothesim vires omnes extraneæ secundum MR, aut MH agentes sunt ipsis MR, aut MH pro-

por-

portionales; tota etiam vis, quæ secundum MR aget, variabitur in ratione simplici rectæ MR, ac pariter in ratione rectæ MH variabitur vis tota, quæ secundum MH aget. Cum igitur juxta hypothesim eamdem vires omnes, quæ in V, & A agunt, sint inter se ut $\frac{1}{VT} : \frac{1}{AT}$; vis absoluta, quæ in M aget secundum MR, erit $= \frac{MR}{VT} \cdot \frac{1}{VT}$, & absoluta vis secundum MH erit $= \frac{MH}{AT} \cdot \frac{1}{AT}$, sive erit vis prior ad posteriorem ut $MR.\,AT^2 : MH.\,VT^2$. At si MT sit ellipsi perpendicularis in puncto M, ex nota ellipseos proprietate, erit $AT^2 : VT^2 = HP : HT = HP : MR$. Itaque vis secundum MR ad vim secundum MH se habebit ut subnormalis ellipseos HP ad semiordinatam MH, & vis omnis composita secundum normalem MP dirigetur, atque erit ipsi normali proportionalis.

Corollarium I.

Si producatur TA quousque occurrat tangenti in puncto N, atque in tangentem ipsam ex T ducatur perpendiculum TQ similia erunt triangula PMH, NTQ, & ex elementis conicorum erit $MP.\,TQ = MH.\,TN = TA^2$, ac vis omnis composita secundum MP, cum sit directe ut MP, erit etiam reciproce ut TQ: & si ex puncto P in semidiametrum MT ducatur perpendiculum Pp, vis eadem omnis resolvi poterit in duas alias, quarum una dirigatur ad centrum T, & sit proportionalis rectæ Mp, altera proportionalis sit rectæ Pp, & perpendicularis semidiametro ellipseos MT.

Corollarium II.

Jam vero ob rectos angulos MHP, MpP circulus diametro MP descriptus transibit per duo puncta H, p, & angulus TMN a tangente, & secante factus erit æqualis angulo segmenti alterni MHp. Quare cum etiam anguli TMH, NTM sint æquales, similia erunt triangula MHp, TMN, eritque $Mp : MH = TN : TM$, sive erit $TM.\,Mp = TN.\,MH = MP.\,TQ = TA^2$, & recta TM erit reciproce ut Mp: & cum attractio omnis sphæroidis, quæ juxta normalem lineam dirigitur, sit ipsi normali MP proportionalis; sphæroidis attractio ad centrum Mp erit reciproce proportionalis distantiæ a centro, sive ellipseos semidiametro TM.

Co-

COROLLARIUM III.

Et quia a ſuperficie pergendo directe ad centrum per Theor. II. attractio omnis minuitur in ratione ſimplici diſtantiarum MT, *m*T, & vires omnes extraneæ ſunt diſtantiis ab axe, & a plano æquatoris proportionales, ſi ſint inſuper AV*av*, RU*ru* ſuperficies ſphæroidicæ ſimiles, ac concentricæ, eadem erit ratio puncti cujuſcumque *m*, & vis ipſius omnis dirigetur ſecundum lineam ellipſi R*m*U normalem, atque erit normali lineæ proportionalis; vis autem puncti *m* ad centrum T erit ut $\frac{RT^2}{mT}$.

THEOREMA VI.

Iiſdem poſitis pondera columnarum omnium MT, VT a ſuperficie ad centrum ductarum erit inter ſe æqualia, eritque totum fluidum in æquilibrio.

Nam primo ſi ſint binæ ſuperficies ſphæroidicæ ſimiles, ac concentricæ AV*av*, RU*ru*, erunt interceptæ M*m*, VU totis MT, VT proportionales. Et ſi ſuperficies ipſæ accipiantur inter ſe ſatis proximæ, & vis particularum omnium M, *m* in centrum T eadem cenſeri poſſit; erit pondus elementi cujuslibet M*m* ut numerus particularum omnium M*m*, & vis particulæ uniuſcujuſque: & cum ſit ut M*m* directe ut MT, & vis particulæ unius M ſit ut MT reciproce, per Coroll. II. Theor. V., idem ſemper manebit pondus elementorum omnium M*m*, VU. Quod cum de ſingulis hujuſmodi ſphæroidicis ſtratis valeat, in quæ omnis ſphærois reſolvi poteſt, pondera etiam columnarum omnium MT, VT a ſuperficie ad centrum ductarum erunt inter ſe æqualia. Hoc autem dato ſi AV*av* referat planum aliquod per axem ſphæroidis A*a* ductum, nullus in plano ipſo motus oriri poterit, quo columnæ aliæ MT altiores, aliæ humiliores fiant. At quia inſuper per Theorema antecedens vis omnis compoſita in punctis ſingulis M, *m* plani ejuſdem dirigitur ſecundum lineas ellipſibus concentricis normales, agitque in plano AV*av*; nullus etiam fluidi motus ſecundum lineas plano normales haberi poterit. Et quia denique motus omnis ad planum aliquod obliquus ſemper in duos alios reſolvitur, quorum unus in plano ipſo fiat, alter ſit plano perpendicularis; patet ſecundum alias quaſcumque directiones nullum fluidi motum eſſe poſſe, ſcilicet fluidum eſſe in æquilibrio.

Co-

Corollarium I.

Si sphærois aliqua sub polis A, *a* compressa circa minorem axem A*a* volvatur, & particulæ omnes se se attrahant in duplicata ratione inversa distantiarum, & sit æquatoris radius VT ad minorem semiaxem AT ut attractio in polo A ad differentiam attractionis, & vis centrifugæ sub æquatore V; erunt particulæ omnes in æquilibrio. Quæ enim rotatorio motu concipitur vis centrifuga proportionalis est radiis circulorum eodem tempore descriptorum, sive distantiæ MR puncti cujusque M a minore axe sphæroidis A*a*.

Corollarium II.

Si proponatur sphærois oblonga revolutione ellipseos AV*av* circa majorem axem V*v* genita, & particulæ ipsius omnes se se attrahant eadem lege, attrahanturque insuper a corpore alio satis dissito in productione axis majoris posito, & semiaxis major VT ad æquatoris radium AT se habeat ut attractio in æquatore AO ad attractionem totam in polo V, erit fluidum omne in æquilibrio. Planis enim quotcumque per majorem axem V*v* ductis, quæ æquatoris circulo occurrant ad rectos angulos, juxta posteriorem formulam Coroll. I. Probl. I. Lib. II. prioris Partis, vis omnis, quæ ex attractione corporis illius longinqui parallele ad axem majorem exorietur in singulis particulis proportionalis erit triplæ distantiæ a plano ipso æquatoris: ac simili modo vis alia, qua axem versus particulæ, & parallele ad æquatoris planum trahentur, proportionalis erit distantiæ ab ipso majori axe.

Corollarium III.

Primo igitur in hypothesi partium se se trahentium in ratione duplicata reciproca distantiarum, si tellus fluida, & homogenea esset omnis, & circa axem diurno motu revolveretur, sphæroidis circa polos compressæ formam indueret, in qua semiaxis minor ad æquatoris radium se haberet ut differentia gravitatis, & vis centrifugæ sub æquatore ad gravitatem totam sub polis. Deinde vero si particulæ omnes Terræ quiescentis ut antea se attraherent, & attraherentur insuper a Sole, aut Luna, in oblongam sphæroidem Terra conformaretur, & semiaxis major sphæroidis dirigeretur ad Solem, vel ad Lunam, atque ad minorem semiaxem se haberet ut tota gravitas sub æquatore ad differentiam absolutarum virium a Terra, & Sole, aut Luna sub polis oblongæ ipsius sphæroidis exercitarum. Co-

COROLLARIUM IV.

Quod si denique bini simul casus hujusmodi componantur, hoc est si particulæ omnes Terræ homogeneæ se se attrahant eadem lege, attrahanturque a Sole, & Luna, atque omnes simul volvantur circa centrum, ob parvitatem virium extranearum, atque exiguam in utraque sphæroide differentiam semiaxium, geminari poterit constructio, & Terra oblongatæ simul, atque oblongæ sphæroidis figuram referet, quæ scilicet gigni posset si ellipsis circa majorem axem sic volveretur ut vertex minoris axis ellipsim aliam describeret. Major autem compositæ sphæroidis axis ad Solem, aut Lunam dirigetur, minor erit ipse axis diurnæ rotationis: & bini iidem axes, atque axis tertius binos intersecans ad rectos angulos inter se erunt in ratione reciproca virium in singulis verticibus agentium.

SCHOLION.

Theoremata elegantissima, quæ oblatarum sphæroidum, oblongarumque æquilibrium definiunt, tradiderunt jam Mac-Laurinus in dissertatione de fluxu, & refluxu maris, quæ anno 1740 a Parisiensi Academia præmium retulit, & Simpsonius in Transactionibus Philosophicis anni 1741, ac deinde nitidius exposuerunt, ille quidem Cap. XIV. Lib. I., hic vero Sect. IX. Par. II. illustrium operum de Fluxionibus, & postmodum nitidissime adornavit D. Clairaut Lib. I. Par. II. de Figura Terræ. Nos his dimostrationem theorematum ex Lib. II. de Gravitate fere integram exscripsimus, quod minime viderentur ad simpliciorem formam reduci posse. Scilicet æquilibrii casum ex eo breviter deduximus, quod viribus omnibus ut antea agentibus, traducto per centrum plano, neque in plano ipso, neque secundum lineas plano ipsi perpendiculares motus aliquis esse possit. At jam Newtonus in Propos. XIX., & XXIV. Lib. III. Princip. præsenserat figuram Terræ totius fluidæ, & homogeneæ, sive in hypothesi diurni motus, sive in hypothesi attractionis Solis, & Lunæ non nisi sphæroidem, oblatam quidem in primo casu, & oblongam in casu altero esse posse: ut recte propterea dixerit Daniel Bernoullius Cap. II. §. VIII. de fluxu, & refluxu maris, Newtono trans velum etiam apparuisse quæ vix ab aliis microscopii subsidio distingui possunt. Casum alium consimilem in Theor. I. Lib. II. Par. I. attigimus. Simili enim modo præsenserat Newtonus, quod ibi perspicue ostendimus, lunarem orbitam ob vires perturbatrices Solis ex circulari in ellipticam abire oportere. Videbimus modo quanam ratione attractionum absolutarum formulæ in sphæroidibus homogeneis breviter tradi possint.

CAPUT TERTIUM.

DE SPHÆRARUM, SPHÆROIDUMQUE ATTRACTIONE.

THEOREMA VII.

Si ad æquales omnes ſphæræ alicujus particulas tendant æquales vires creſcentes, aut decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum reciproce; tota ſphæræ attractio in punctum aliquod exterius poſitum exercita erit directe ut materiæ quantitas, & reciproce ut quadratum diſtantiæ a centro.

Sit MCN, fig. 28., ſectio per punctum A, & centrum ſphæræ O facta, accipianturque duo puncta C, c ſatis proxima, ducanturque AC, Ac, atque ipſis veluti radiis deſcribantur circulares arcus HCD, cd, ac deinde ex C in AN, & ex O in AC productam demittantur perpendicula CB, OP, jungaturque OC, ac radius ad peripheriam ſe habeat ut $1:p$. Tota arcus Cc attractio ſecundum AB erit $\frac{AB.Cc}{AC^2}$, & propterea erit $\frac{p.AB.BC.Cc}{AC^3}$ attractio circularis annuli revolutione arcus Cc circa axem MN geniti. Erunt autem æquales anguli HcC, ACM, cCT, & angulus cCT arcui CT ad peripheriam inſiſtens æqualis erit angulo COP, qui ad centrum inſiſtit dimidio eidem arcui, eruntque inter ſe ſimilia triangula rectangula CcH, COP: adeoque fiet $Cc:Hc = CO:PO = CO:\frac{AO.BC}{AC}$, & $Cc = \frac{AC.CO.Hc}{AO.BC}$, atque annuli totius attractio erit $\frac{p.CO.AB.Hc}{AO.AC^2}$. Inſuper in triangulo CAO eſt $AC^2 + AO^2 = CO^2 + 2AO.AB$, atque ob $AO^2 - CO^2 = AM.AN$ evadet attractio eadem $= \frac{p.CO.\overline{AC^2 + AM.MN}.Hc}{2AO^2.AC^2}$

$$= \frac{p.MO.Dd}{2AO^2} + \frac{p.MO.AM.MN.Dd}{2AO^2.AD^2}.$$

Jam

Jam vero dum punctum D ex M in N transit, summa omnium Dd est MN, seu 2 MO, & summa omnium $\frac{Dd}{AD^2}$ est $\frac{1}{AM} - \frac{1}{AN}$, sive est $\frac{2\,MO}{AM.AN}$. Erit itaque attractio sphæricæ superficiei $\frac{2p.MO^2}{AO^2}$: & cum $2p.MO^2$ sit ipsa sphærica superficies; attractio strati cujuscumque sphærici, adeoque etiam sphæræ integræ erit directe ut materiæ quantitas, & reciproce ut quadratum distantiæ a centro.

COROLLARIUM I.

Si punctum A tangat exterius sphæricam superficiem, & in posteriore formula $\frac{2p.MO^2}{AO^2}$ fiat AO = MO, prodibit tota superficiei ipsius attractio $= 2p$. Quod si vero intelligamus punctum A collocari in ipsa sphærica superficie, & reassumendo priorem formulam $\frac{p.MB.BC.Cc}{MC^2}$ fiat $MC^2 = 2MO.MB$, & $Cc = \frac{MO.Bb}{BC}$, fig. 29., erit attractionis elementum $\frac{\frac{1}{2}p.Bb}{\surd(2MO.MB)} = \frac{p}{2\surd\overline{2MO}} \cdot \frac{Bb}{\surd\overline{MB}}$: & cum summa omnium $\frac{Bb}{\surd\overline{MB}}$ sit $2\surd\overline{MB}$, posita MB = 2MO, erit tota superficiei sphæricæ attractio $= p$.

COROLLARIUM II.

Patet autem ex Coroll. I. Theor. II. attractiones punctorum omnium strati cujuslibet sphæroidici, adeoque etiam sphæricæ alicujus superficiei in punctum aliquod interius positum exercitas se invicem destruere, & summam attractionum omnium evanescere. Quod si igitur punctum aliquod interius tangat sphæricam superficiem, ac deinde in superficie ipsa collocetur, postmodum vero superficiem eamdem exterius tangat, attractiones puncti propositi in tribus hisce casibus erunt in progressione arithmetica $o, p, 2p$, atque in postremo casu duplo major erit attractio quam in secundo.

Corollarium III.

Hujus autem progressionis ratio patet ex formula

$$\frac{p.\,MO.\,Dd}{2\,AO^2} + \frac{p.\,MO.\,AM.\,MN.\,Dd}{2\,AO^2.\,AD^2}.$$

Nam si quæratur attractio circuli exigui radio B*c* descripti, fig. 28., & fiat AM = AD = D*d*, evadet secundus formulæ ipsius terminus $\frac{p.\,MO.\,MN}{2\,AO^2}$: ac deinde congruentibus punctis M, & C, fiet D*d* = o, & prior terminus evanescet, secundus vero, seu tota exigui circuli attractio fiet = *p*. Quod si quæratur superficiei reliquæ attractio, & fiat AM = o, evanescet secundus terminus, ac fiet attractionis elementum $\frac{p.\,Dd}{2\,AO}$, ac posita D*d* = 2AO attractio superficiei totius reliquæ æqualis erit attractioni circuli illius exigui. Addetur autem circuli attractio attractioni reliquæ superficiei dum punctum A exterius tanget sphæricam superficiem: subtrahetur vero cum interior erit contactus: & cum punctum A in ipsa erit superficie sphæræ in neutram partem a circulo illo exiguo impelli poterit.

Corollarium IV.

Cum sit sphæræ soliditas $\frac{2}{3}\,p.\,MO^3$, erit attractio sphæræ in punctum aliquod exterius positum $\frac{2\,p.\,MO^3}{3\,AO^2}$, eadem scilicet, ac si omnis materies, quæ in sphæra est, in sphæræ centro colligeretur. Quod si sit MO = AO, erit sphæræ attractio $\frac{2}{3}\,p.\,MO$: nimirum attractiones sphærarum homogenearum in extima superficie erunt sphærarum radiis proportionales, ut etiam in Theor. I. dictum est. Denique si sphæræ aut nucleos sphæricos diversæ densitatis in centro habeant, aut ex stratis sphæricis hetherogeneis coalescant, & densitates recedendo a centro augeantur, vel imminuantur in data quavis ratione distantiarum, erunt semper attractiones directe ut massæ, & reciproce ut quadrata distantiarum.

Problema V.

Invenire attractionem sphæroidis oblatæ, & proxime ad sphæram accedentis in punctum aliquod in productione axis majoris positum.

Sit

Sit MQN sphæroidis, fig. 29., & MCN sphæræ inscriptæ sectio per minorem axem MN facta, ducanturque ex puncto A rectæ AT, At sibi proximæ, quæ sphæræ occurrant in punctis C, T, c, t, unde ad MN ducantur perpendicula CB, TF, cb, tf. Sint insuper OP, ORp perpendicula ex centro O ducta in rectas AT, At, producaturque BC quousque occurrat sphæroidi in Q, & ex C in At demittatur perpendiculum aliud CH. Tum si sit AO $= a$, semiaxis minor MO $=$ C, differentia majoris, & minoris $=$ B, erit QC $= \frac{B}{C}$. BC, & totus annulus circularis revolutione ipsius QC circa axem genitus $= \frac{pB \cdot BC^2}{C}$. Cumque ob affinitatem sphæræ, & sphæroidis, annuli puncta omnia eodem modo agant in punctum A, erit $\frac{pB \cdot BC^2}{C} \cdot \frac{AB \cdot Bb}{AC^3}$ attractio secundum AB totius materiæ, qua sphærois sphæram inscriptam superat, & quæ duobus planis axi MN perpendicularibus in punctis B, b intercipitur. Est vero ob similitudinem triangulorum $\frac{AB}{AC} = \frac{AP}{AO}$, & $\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{PO^2}{AO^2}$. Insuper ex natura circuli est Bb:Cc $=$ BC:CO, & juxta Theor. VII. est Cc:Hc $=$ CO. AC : AO. BC, & Hc:HC $=$ PO:PC, atque est pariter HC:Rp $=$ AC:AR $=$ AC:AP, adeoque compositis rationibus est Bb: Rp $=$ BC. CO. AC. PO. AC : CO. AO. BC. PC. AP, sive est Bb $= \frac{AC^2 \cdot PO \cdot Rp}{AO \cdot PC \cdot AP}$. Hisce valoribus substitutis suo loco singulis fiet attractio materiæ ejusdem $\frac{pB}{C} \cdot \frac{PO^3 \cdot AC^2 \cdot Rp}{PC \cdot AO^4}$: atque erit similiter $\frac{pB}{C} \cdot \frac{PO^3 \cdot AT^2 \cdot Rp}{PC \cdot AO^4}$ attractio totius materiæ ultra sphæram inscriptam redundantis, & interceptæ duobus planis perpendicularibus axi in punctis F, & f. Quare ob AC^2 + AT^2 $=$ 2 AP^2 + 2 PC^2 erit summa duarum attractionum, sive elementum differentiæ attractionis sphæræ, & sphæroidis $= \frac{pB}{C \cdot a^4} \cdot \frac{PO^3}{PC}$. $\overline{2\,AP^2 + 2\,PC^2} \cdot Rp$: & si PC vocetur X, & sit PO $= \sqrt{C^2 - X^2}$,

&

& $Rp = \frac{X.dX}{\sqrt{C^2 - X^2}} = \frac{PC.dX}{PO}$, fiet elementum quæsitæ attractionis

$\frac{2pB}{C.a^4}.\overline{C^2 - X^2}.\overline{a^2 - C^2 + 2X^2}.dX$, cujus summa cum sit $=$

$\frac{2pB}{C.a^4}.(a^2C^2X - C^4X + C^2X^3 - \frac{1}{3}a^2X^3 - \frac{2}{5}X^5)$ substituendo pro

X radium sphæræ C, fiet differentia attractionis sphæroidis, & sphæræ inscriptæ $= \frac{2pB}{C.a^4}.\overline{\frac{2}{3}a^2C^3 - \frac{2}{5}C^5}$, atque addita attractione sphæræ erit tota attractio sphæroidis $= \frac{2pC^3}{3a^2} + \frac{4pBC^3}{3a^2} - \frac{4pBC^5}{5a^4}$.

Corollarium.

Si sit $a = C$, hoc est si punctum A sit in polo sphæroidis oblatæ, fiet attractio sphæroidis $= \frac{2}{3}pC + \frac{8}{15}pB$. Et si sphærois oblonga proponeretur, cujus major axis esset C, differentia majoris, & minoris B, quantitas eadem B negative accipienda erit, ac fiet in polo sphæroidis oblongæ attractio $= \frac{2}{3}pC - \frac{8}{15}pB$. Si semiaxis major sphæroidis oblongæ $C + B$, minor C, substituendo in antecedenti expressione $C + B$ loco C, fiet in polo oblongæ sphæroidis, quæ eosdem semiaxes habeat cum oblata, attractio omnis $\frac{2}{3}pC + \frac{2}{15}pB$.

Theorema VIII.

Si sphærois accedat proxime ad sphæram, & punctum A' extra productionem axis MN ubilibet accipiatur, attractio omnis secundum A'O exercita proxime æqualis erit attractioni alterius sphæroidis, cujus axis sit 2 M'O, & quæ eamdem soliditatem propositæ sphæroidis habeat.

In primis si in eodem plano, eodemque centro describatur ellipsis aliqua, quæ accedat proxime ad circulum, & circulus, qui eamdem aream cum ellipsi complectatur; erecta ex centro linea ad planum propositum perpendiculari, in quovis lineæ ipsius puncto eadem erit attractio ab ellipsi, & a circulo exercita. Nam ob area-

rum

rum æqualitatem, ſpatium, quo ellipſis in vertice majoris axis excurret ultra circulum, æquale erit ſpatio, quo circa verticem minoris axis deficiet: & ob ellipſim proxime circularem, utriuſque ſpatii puncta omnia cenſeri poterunt diſtantiam a perpendiculari erecta habere eamdem, & compenſare ſe ſe invicem vires omnes, & quibus ellipſis excedit circulum, & quibus deficit. Deinde ſi ellipſim inclinari intelligamus, & circa minorem axem aliquantulum torqueri, imminuta diſtantia ex parte una augebitur attractio, & minuetur ex parte altera: & ſi inclinatio omnis exigua ſit, negligendo differentiam incrementi, & decrementi virium, cenſeri poterit vim omnem, quæ ad ellipſeos centrum dirigitur manere eamdem. Nam ſi recta XZ, fig. 30., ſemiordinatam aliquam ellipſeos axi minori in puncto o normalem referat, ac ſit pariter rectæ Ao normalis, eaque ſic vertatur circa o ut puncta XZ circulares arcus XU, ZV deſcribendo abeant in U, & V, atque in AU, & AV ex X, & Z demittantur perpendicula Xx, Vz, erit attractio punctorum U, & V ſecundum Ao exercita $= \frac{Au}{AU^3} + \frac{Av}{AV^3} =$

$$\frac{Au}{AX^3 + 3AX^2.Ux} + \frac{Av}{AZ^3 - 3AZ^2.Zz} = \frac{2Ao}{AX^3} - \frac{3Au.Ux + 3Av.Zz}{AX^4}:$$

unde ſi inflexionis angulus ſit ſatis parvus negligi poterunt producta rectarum Ux, aut Zz in differentiam rectarum Au, Av, & attractio punctorum U, V ſecundum Ao æqualis erit attractioni $\frac{2Ao}{AX^3}$ punctorum X, & Z, ac totæ duarum rectarum XZ, VU attractiones æquales erunt. Quod cum pro ſingulis ſemiordinatis ellipſeos cujuſque valeat, quæ in ſphæroide propoſita planis quibuslibet per M'O, fig. 29., parallele ad tangentem puncti M' ductis ſecari poſſunt, tota etiam attractio ellipſeos uniuſcujuſque æqualis erit attractioni circuli, qui eamdem aream, atque idem centrum cum ellipſi habeat, ac ſit inſuper diametro per M' ducto perpendicularis: ac tota attractio ſphæroidis in punctum A' æqualis erit attractioni alterius ſphæroidis æque ſolidæ, & cujus revolutionis axis ſit ipſa diameter, quæ per M' ducitur.

Corollarium.

Quia radius circuli, qui eamdem aream cum ellipſi habeat, eſt medius proportionalis inter binos ellipſeos ſemiaxes, ellipſeos autem

tem in O sectæ plano per semidiametrum conjugatam OG, parallele ad tangentem puncti M', transeunte semiaxes bini sunt semidiameter eadem OG, & æquatoris radius C+B, atque insuper aliæ ellipses, inter se similes cum sint, eamdem servant proportionem semiaxium OG, & C+B; tota etiam sphæroidis propositæ attractio in punctum A' æqualis erit attractioni alterius sphæroidis, cujus revolutionis axis sit 2M'O, & in qua æquatoris radius sit medius proportionalis inter OG, & C+B.

Problema VI.

Iisdem positis attractionem sphæroidis in punctum quodvis ubivis positum invenire.

Si in sphæroide proposita cosinus latitudinis puncti M', vel sinus distantiæ a polo M ut antea acceptæ vocetur s, erit sphæroidis semidiameter $M'O = C + B.s^2$, quemadmodum ex iisdem formulis priorum problematum libri hujus, atque ex scholio Cap. I. Lib. II. prioris partis facile colligitur. Tum vero ob angulum M'OP proxime æqualem recto erit $\sqrt{1 - s^2}$ sinus distantiæ puncti G a polo N, ac fiet conjugata semidiameter $OG = C + B - B.s^2$, eritque $C + B - \frac{1}{2}B.s^2$ media proportionalis inter conjugatam semidiametrum OG, & æquatoris radium C+B. At juxta corollarium superius attractio propositæ sphæroidis in punctum A' secundum A'O exercita æqualis est attractioni sphæroidis alterius, cujus revolutionis semiaxis sit $C + B.s^2$, & æquatoris radius $C + B - \frac{1}{2}B.s^2$, & in qua idcirco differentia semiaxium sit $B - \frac{3}{2}B.s^2$. Quod si igitur in formula Probl. V. scribamus $C + B.s^2$ loco C, & $B - \frac{3}{2}B.s^2$ loco B, negligamusque quadraticas differentiæ B potestates, & distantia puncti A' a centro vocetur a, evadet quæsita attractio

$$\frac{2p}{3a^2}.(C^3 + 3C^2.s^2) + \frac{4pC^2}{3a^2}.(B - \tfrac{3}{2}B.s^2) - \frac{4pC^4}{5a^4}.(B - \tfrac{3}{2}B.s^2)$$

$$= \frac{2pC^3}{3a^2} + \frac{4pC^2B}{3a^2} - \frac{4pC^4B}{5a^4} + \frac{6pC^4B.s^2}{5a^4}$$

$$= \frac{2pC^3}{3a^2} + \frac{4pC^2B}{3a^2} + \frac{2pC^4B}{5a^4}(1 - 3T^2).$$

Co-

COROLLARIUM I.

Si ſphæroidis ſoliditas $\frac{2}{3}p.(C^3 + 2C^2B)$ vocetur M, erit ipſius attractio $\frac{M}{a^2} + \frac{2pC^2B}{5a^4}.\overline{1 - 3T^2} = \frac{M}{a^2} - \frac{2pC^2B}{5a^4}.\overline{2 - 3s^2}$: & ſi ſit $s = \sqrt{\frac{2}{3}}$, qui eſt ſinus circiter 55° 44′, recedendo directe a centro ſphæroidis attractio minuetur in duplicata ratione auctarum diſtantiarum, & æqualis erit attractioni ſphæræ ejuſdem ſoliditatis.

COROLLARIUM II.

Et quidem ſi linea ad centrum ducta cum æquatoris plano efficiat angulum minorem 35° 16′, attractio ſphæroidis erit major quam ſi materies omnis in ſphæram conformaretur: minor vero erit attractio ſi angulus ille fiat major. Ob proximitatem vero ſphæræ, & ſphæroidis, attractio ubique erit quam proxime in ratione illa duplicata reciproca diſtantiarum a centro: in majoribus autem diſtantiis, cum ſecundus terminus debeat præ primo negligi, lex eadem accuratius ſervabitur.

COROLLARIUM III.

Data diſtantia A′O a centro, atque a plano æquatoris pergendo ad polos, erunt decrementa attractionis proportionalia quadratis ſinuum rectorum latitudinis. In ipſa vero ſphæroidis ſuperficie poſito $A'O = a = M'O = C + B.s^2$, & $\frac{C^3}{a^2} = C - 2B.s^2$, attractio omnis fiet $\frac{2}{3}pC + \frac{8}{15}pB - \frac{2}{15}pB.s^2 = \frac{2}{3}pC + \frac{2}{5}pB + \frac{2}{15}pB.T^2$, & in æquatore ipſo ſphæroidis erit $\frac{2}{3}pC + \frac{2}{5}pB$: nimirum ab æquatore pergendo ad polos in eadem ſuperficie ſphæroidica erunt incrementa attractionis quadratis ſinuum rectorum latitudinis proportionalia.

COROLLARIUM IV.

Eruntque attractiones in polo ſphæroidis oblongæ, in æquatore ſphæroidis oblatæ iiſdem ſemiaxibus deſcriptæ, & in ſuperficie circumſcriptæ ſphæræ inter ſe ut
$\frac{1}{3}C + \frac{1}{15}B$, $\frac{1}{3}C + \frac{1}{5}B$, $\frac{1}{3}C + \frac{1}{3}B$, nimi-

nimirum erunt continue proportionales. Sunt autem juxta elementa conicorum quantitates materiæ in tribus hujusmodi corporibus in ratione continua semiaxis minoris C ad majorem C + B. Quare trium corporum attractiones non erunt in ratione illa, quam semiaxes, & quantitates materiæ in singulis continuant.

Corollarium V.

Si ellipsis volvatur circa majorem axem, & sphæroidem oblongam gignat, inquiraturque attractio in puncto aliquo æquatoris; ductis quotcumque planis minori axi normalibus dividenda erit sphærois in totidem ellipses similes: & cum ellipseos in centro sectæ semiaxis major sit $C + B$, minor autem C, & radius circuli eamdem aream cum ellipsi comprehendentis sit $C + \frac{1}{2} B$, cumque insuper, per corollarium quinti problematis, attractio in polo sphæroidis oblatæ semiaxibus $C + B$, & C descriptæ sit $\frac{2}{3} pC + \frac{8}{15} pB$, scribendo $\frac{1}{2} B$ loco B, fiet attractio in æquatore sphæroidis oblongæ iisdem cum oblata semiaxibus descriptæ $\frac{2}{3} pC + \frac{4}{15} pB$.

Scholion.

Simpsonius, & Mac-Laurinus in locis, quos memoravimus, methodum invenerunt supputandi attractionem in quodvis punctum superficiei sphæroidicæ exercitam: quod Newtonus in Coroll. I. Prop. XCI. Lib. I. non nisi pro corpusculo in polis sito, & Daniel Bernoullius Cap. II. de æstu maris pro corpusculo sito in polis, & æquatore præstare docuit. Clairaut, Walmesley, aliique authores generaliter definierunt attractionem corpusculi ubivis positi extra sphæroidem, quæ ad sphæram proxime accedat. Nos hic, atque in Cap. III. Lib. II. de Gravitate calculum attractionis sphærarum, ac sphæroidum, quantum ad theoriam figuræ terrestris sufficit, brevissimum efficere conati sumus. Minime autem prætereundum est, quod in penultimo corollario adnotavimus, attractiones in polo sphæroidis oblongæ, in æquatore sphæroidis oblatæ iisdem semiaxibus descriptæ, atque in superficie circumscriptæ sphæræ exercitas esse quidem in ratione continua, sed non in ea, quam semiaxes, sive materiæ quantitates in tribus hisce corporibus continuant. Newtonus in Propos. XIX. Lib. III. gravitatem in æquatore sphæroidis compressæ esse mediam proportionalem inter gravitates in

in superficie sphæræ circumscriptæ, & in polo sphæroidis oblongæ ex eo tantum collegerat, quod sphæra imminuendo diametrum unam in ratione data vertitur in sphæroidem compressam, quod sphæroïs compressa imminuendo in eadem ratione diametrum aliam vertitur in oblongam sphæroidem, quodque in casu utroque minui debet gravitas in eadem ratione quam proxime. Quæ omnia eo videntur redire ut abeunte in sphæroidem oblatam sphæra, & oblata in oblongam sphæroidem, deficiant attractiones in eadem ratione, in qua materiæ similiter utrobique positæ quantitas imminuitur, scilicet in ratione semiaxis majoris sphæroidis ad minorem. Nævum hujusmodi a nobis antea in dissertatione de Figura Terræ adnotatum excusare voluerunt Cl. Short, & Murdok in Transact. anni 1753, postrema Newtoni verba *in eadem ratione quam proxime* de continua ratione intelligentes non ea quidem, quam materiæ quantitates, & semiaxes exhibent: qui tamen loci indicati sensus minime videtur esse. Alia Newtoni loca emendabimus cum de Figura Lunæ, & de præcessione æquinoctiorum mox differemus.

CAPUT QUARTUM.

DE PLANETARUM FIGURA, QUÆ EX ÆQUILIBRII LEGIBUS COLLIGITUR.

PROBLEMA VII.

Si particulæ singulæ sphæroidis oblongæ revolutione ellipseos $AVav$ circa majorem axem Vv genitæ, fig. 23., se se attrahant, atque attrahantur insuper in ratione duplicata reciproca distantiarum a corpore alio satis dissito in productione axis majoris posito, & data sit ratio attractionis in æquatore exercitæ ad vim extraneam, ac sint particulæ eædem omnes fluidæ, & homogeneæ, invenire proportionem semiaxium.

Si æquatoris radius vocetur C, & sit major sphæroidis semiaxis $C+B$, juxta corollarium quinti problematis erit attractio in polo V, vel $v=\frac{2}{3}pC+\frac{2}{15}pB$, & per Coroll. V. Probl. VI. erit attractio in æquatore $A=\frac{2}{3}pC+\frac{4}{15}pB$. Jam vero juxta in-

dicatam formulam Coroll. I. Probl. I. Lib. II. prioris Partis, si particulæ omnes se se invicem trahentes in ratione duplicata reciproca distantiarum trahantur insuper eadem lege a corpore alio satis dissito in productione axis majoris posito, minuetur quidem sub polis V, v gravitas in centrum T, augebitur autem sub æquatore A, a: atque erit vis, qua gravitas augebitur sub æquatore, ad vim, qua imminuetur sub polis ut AT : 2VT. Quare si tota sphæroidis oblongæ attractio sub æquatore A se habeat ad vim, quæ ibidem a corpore extraneo impenditur, ut G : P, & sphærois accedat proxime ad sphæram erit absolutum pondus

sub æquatore $\frac{2}{3}pC + \frac{4}{15}pB + \frac{2}{3}pC.\frac{P}{G}$

sub polis vero $\frac{2}{3}pC + \frac{2}{15}pB - \frac{2}{3}pC.\frac{2P}{G}$

& differentia utriusque erit $\frac{2}{15}pB + 2pC.\frac{P}{G}$.

Cum igitur juxta Coroll. II. Theor. VI. in casu æquilibrii particularum omnium semiaxes sphæroidis totius oblongæ esse debeant in ratione reciproca ponderum, erit etiam rationibus a se invicem subductis

$$\frac{2}{15}pB + 2pC.\frac{P}{G} : \frac{2}{3}pC + \frac{2}{15}pB - \frac{4}{3}pC.\frac{P}{G} = B : C,$$

atque inde illico eruetur $2C.\frac{P}{G} = \frac{8}{15}B$, sive $B : C = 15P : 4G$.

Corollarium I.

Quia per Coroll. III. Probl. I. Lib. II. prioris Partis gravitas Lunæ in Terram ad vim perturbatricem, quæ a Sole juxta vectorem radium lunaris orbitæ exercetur in mediocri distantia se habet ut 178.725 : 1, ac prior vis accedendo ad Terram augetur in ratione duplicata reciproca distantiarum, altera vero imminuitur in simplici distantiarum ratione; erit in superficie Terræ gravitas G ad vim P ex Solis attractione ortam in ratione composita ex rationibus 178.725 : 1, 3600 : 1, & 60 : 1, sive ut 38604600 : 1. Quare si radius mediocris Terræ ut supra assumatur hexapedarum $3273008\frac{1}{2}$, seu pedum Parisiensium 19638051, in hypothesi Terræ totius fluidæ, & homogeneæ erit differentia semiaxium, quæ ex attractione Solis pendebit, pedum $\frac{15.19638051}{4.38604600}$, seu pedis unius, & digitorum undecim. Co-

COROLLARIUM II.

Pariter si sint M, & 1 quantitates materiæ in Terra, & Luna, ac sint mediocres radii C, & c, ac radius lunaris orbitæ vocetur R, erit $\frac{1}{c^2}$ gravitas absoluta sub æquatore Lunæ, & vis perturbatrix Terræ erit $\frac{c.M}{R^3}$, atque erit minor semiaxis Lunæ ad differentiam semiaxium, quæ ex attractione Terræ in eadem fluiditatis, & homogeneitatis hypothesi oriri posset, ut $\frac{4}{c^2} : \frac{15 c.M}{R^3}$. Cum itaque sit R : C = 60 : 1, C : c = 73 : 20, R : c = 219 : 1, si ratio massarum M : 1 statuatur 62. 8 : 1, ut ex phænomenis præcessionis æquinoctiorum, & nutationis terrestris axis colligitur, fiet eadem differentia semiaxium $= \frac{15 c^4.M}{4 R^3} = \frac{1}{44600}$: & si mediocris radius Terræ ut antea assumatur, minuaturque in ratione 20 : 73, differentia semiaxium Lunæ fluidæ evadet pedum $120\frac{2}{3}$.

COROLLARIUM III.

Si maneant omnia, quæ in hac ipsa propositione assumpta sunt, & proponatur alia oblonga sphærois, quæ ad sphæram similiter accedat, & in qua bini semiaxes sint c, & $c + b$, gravitas sub æquatore g, & vis extranea Q, erit similiter $b : c = 15 Q : 4 g$, ac fiet $B : b = g.C.P : c.Q.G$. Quare si in binis sphæroidibus propositis massarum ratio sit M : 1, atque ob sphæroidum cum sphæris affinitatem sit $G : g = \frac{M}{C^2} : \frac{1}{c^2}$, evadet $B : b = C^3.P : c^3.M.Q$: ac si insuper extraneæ vires ex mutua oriantur sphæroidum duarum attractione, & sphæroides sint a se invicem satis dissitæ, atque ad sphæram proxime accedant, ac propterea sub utroque æquatore vis extranea sit massæ attrahentis sphæroidis, & radio attracti æquatoris proportionalis, posito $P : Q = C : c.M$ fiet $B : b = C^4 : c^4.M^2 = \frac{1}{c^4} : \frac{M^2}{C^4}$. Scilicet differentiæ semiaxium sphæroidis utriusque inter se erunt in ratione directa quadruplicata

cata radiorum, & maſſarum reciproca duplicata: ſive etiam in ratione duplicata reciproca virium gravitatis in æquatore utriuſque ſphæroidis agentium.

Problema VIII.

Si ſphærois oblata accedat proxime ad ſphæram, & circa minorem axem rotetur, ac fluida, & homogenea ſit omnis, & particulæ ipſius ſingulæ ſe ſe attrahant in ratione duplicata reciproca diſtantiarum, ac data inſuper ſit ratio attractionis ſub æquatore ad vim centrifugam; invenire proportionem ſemiaxium.

Si major ſphæroidis ſemiaxis, ſive æquatoris radius ut antea ſit $C + B$, & minor ſemiaxis C, juxta idem corollarium quinti problematis, erit tota ſphæroidis attractio ſub polis $\frac{2}{3}pC + \frac{8}{15}pB$, & per Coroll. III. Probl. VI. erit attractio ſub æquatore $\frac{2}{3}pC + \frac{2}{5}pB$. Quod ſi inſuper tota ſphærois circa axem minorem uniformiter revolvatur, & tota gravitas ſub æquatore ſe habeat ad vim centrifugam ut $g:1$, quia ob ſphæroidis, & ſphæræ affinitatem vis centrifuga præ gravitate, & differentia ſemiaxium præ ſemiaxibus ipſis exigua eſt, neglectis minoribus fractionibus vis centrifuga ſub æquatore cenſeri poterit $\frac{2pC}{3g}$, & abſolutum pondus $\frac{2}{3}pC + \frac{2}{5}pB - \frac{2pC}{3g}$. Itaque per Coroll. I. Theor. VI. fluido omni ad æquilibrii ſtatum deducto eſſe oportebit

$$\frac{2}{3}pC + \frac{8}{15}pB : \frac{2}{3}pC + \frac{2}{5}pB - \frac{2pC}{3g} = C + B : C.$$

Inde autem eruetur $\frac{B}{C+B} = \frac{5}{4g}$, ſive erit ſemiaxis major ſphæroidis ad differentiam majoris, & minoris ut quadruplum gravitatis ad quintuplum vis centrifugæ ſub æquatore.

Corollarium I.

Si gravitas abſoluta corporum ſub æquatore ſe habeat ad vim centrifugam ut $288\frac{1}{2}:1$, quemadmodum in Coroll. II. Probl. III. ſtatutum eſt, ac ſi inſuper Terra omnis fluida intelligatur, & particulæ ipſius ſingulæ ſint homogeneæ, ac ſe invicem attrahant in ratione duplicata reciproca diſtantiarum, & circa axem diurno motu uniformiter

ter revolvi pergant, iisdem in æquilibrio compositis Terra omnis oblatæ sphæroidis figuram induet, & æquatoris radius ad differentiam semiaxis, qui per polos transit, se habebit ut 1154 : 5, seu proxime ut 231 : 1, eritque semiaxis major ad minorem ut 231 : 230.

COROLLARIUM II.

Si sit 1 : R ut radius æquatoris Jovis ad radium orbitæ alicujus Satellitis, & 1 : T ut tempus revolutionis Jovis circa axem ad tempus revolutionis periodicæ ipsius Satellitis circa Jovem, erit vis centrifuga in æquatore Jovis ad vim centrifugam Satellitis in orbita circa Jovem descripta ut $1 : \frac{R}{T^2}$, quæ in circulari orbita cum æqualis sit vi centripetæ, cumque Satellitis gravitas in Jovem ad gravitatem in æquatore Jovis se habeat ut $1 : R^2$, erit in æquatore ipso gravitas ad vim centrifugam ut $R^3 : T^2$, &, facta eadem homogeneitatis partium, & fluiditatis hypothesi, erit differentia semiaxium Jovis $\frac{5T^2}{4R^3}$. Quare si tempus periodicum quarti Jovis Satellitis sit $16^d\ 16^h\ 32'$, sive 24032', & tempus revolutionis Jovis circa axem proprium sit 596', si radius orbitæ ipsius Satellitis assumatur 25.3 semidiametrorum Jovis, neglectis altioribus potestatibus differentiæ semiaxium, fiet differentia omnis $\frac{1}{8}$ circiter. At si radius orbitæ Satellitis ejusdem juxta Poundii observationes sit semidiametrorum Jovis 26.63, prodibit differentia semiaxium $\frac{1}{9.3}$.

COROLLARIUM III.

Si maneant omnia ut in corollario secundo problematis præcedentis, & gravitas in superficie Lunæ ad gravitatem in superficie Terræ se habeat ut $\frac{1}{c^2} : \frac{M}{C^2}$, atque insuper sub æquatore Terræ se habeat gravitas ad vim centrifugam ut $288\frac{1}{2} : 1$, & vis centrifuga sub æquatore Terræ sit ad vim centrifugam sub æquatore Lunæ ut $\frac{C}{1} : \frac{c}{T^2}$, compositis rationibus erit gravitas sub æquatore Lunæ ad vim centrifugam ut $288\frac{1}{2}.C^2.T^2 : c^2.M$, ac fiet $\frac{5c^2M}{4.288\frac{1}{2}.C^2.T^2} = \frac{c^2M}{231.C^2.T^2}$ differentia semiaxium ex mutua at-

attractione partium, atque ex motu illo orta, quo Luna circa axem proprium eadem periodo revolvitur, qua circa Terram revolutionem integram absolvit. Cum itaque sit $1 : T = 23^h\, 56' : 27^d\, 7^h\, 43'$, aliis corollarii indicati numeris substitutis, differentia semiaxium Lunæ fluidæ, & homogeneæ, & circa axem proprium revolutæ fiet $\frac{1}{133690}$, seu pedum circiter 40.

Corollarium IV.

Quia Terræ, & Lunæ volumina sunt inter se ut $C^3 : c^3$, & massis inter se positis ut $M : 1$ densitates Terræ, & Lunæ inter se esse debent ut $\frac{M}{C^3} : \frac{1}{c^3}$, differentia semiaxium Terræ ad differentiam semiaxium Lunæ se habebit ut densitas Lunæ ad densitatem Terræ, & quadratum temporis periodici Lunæ ad quadratum temporis periodici Terræ circa axem proprium: atque universim differentia semiaxium Terræ, & Planetæ alterius erunt in ratione composita ex reciproca simplici densitatis, & reciproca duplicata periodici temporis circa axem. Ita cum quadrata periodicorum temporum Terræ, & Jovis circa axes proprios sint inter se ut $29 : 5$, & densitas Terræ ad densitatem Jovis se habeat circiter ut $351 : 94\frac{1}{2}$ per Coroll. III. Probl. II. Lib. II. alterius Partis, differentia semiaxium Jovis in iisdem hypothesibus fiet circiter

$$\frac{351}{94\frac{1}{2}} \cdot \frac{29}{5} \cdot \frac{1}{231} = \frac{1}{10.7}.$$

Theorema IX.

Si Terra oblatæ sphæroidis proxime ad sphæram accedentis figuram referat, & aut homogenea sit omnis, aut nucleum sphæroidicum densiorem in centro habeat, aut ex stratis quibuslibet coalescat concentricis, ac sphæroidicis, quorum densitas a superficie pergendo ad centrum in ratione quavis augeatur; absolutum pondus in extima superficie ab æquatore pergendo ad polos augebitur semper quam proxime in duplicata ratione sinuum latitudinis.

Nam si in fig. 23. referat AV*av* sectionem superficiei sphæroidicæ per Terræ polos A, & *a* factam, ac sit RU*ru* sectio nuclei sphæroidici, ac densioris; perinde se habebit punctum quodcumque M ac si a sphæroide homogenea attraheretur, addita insuper in centro sphæroide alia, cujus densitas æqualis sit differentiæ den-

densitatum nuclei, & materiæ circumpositæ. Jam vero in superficie sphæroidis homogeneæ, & oblatæ ab æquatore pergendo ad polos, per Coroll. III. Probl. VI., augetur gravitas in duplicata ratione sinuum latitudinis. Insuper si sit Δ differentia densitatum, seu tota densitas sphæroidis, quæ in centro adjici intelligitur, & fiat TR $= c$, TU $= c + b$, juxta idem Probl. VI. erit sphæroidis ipsius attractio in punctum M

$$= \frac{2p\Delta c^3 . (c + 2b)}{3\,TM^2} + \frac{2p\Delta c^4 b . (1 - 3T^2)}{5\,TM^4}:$$

& cum positis aliis citati problematis denominationibus sit $TM = C + B . s^2 = C + B - B . T^2$, divisione facta, & neglectis productis quantitatum exiguarum B, & b, fiet attractio eadem

$$= \frac{2p\Delta c^3 . (c + 2b)}{3(C + B)^2} + \frac{2p\Delta c^3}{(C + B)^4} . \left(\tfrac{1}{5} cb + \overline{\tfrac{2}{3} CB - \tfrac{3}{5} cb} . T^2\right):$$

adeoque ab æquatore pergendo ad polos & ipsa augebitur in duplicata ratione sinuum latitudinis. Quare cum tota vis centrifuga in loco M sit rectæ RM proportionalis, & qua parte exercetur juxta directionem semidiametri TM sit ut RM^2, ac differentia virium hujusmodi sub æquatore V, & in loco ipso M sit ut TR^2; viribus simul omnibus acceptis absolutum pondus ab æquatore pergendo ad polos augebitur in duplicata eadem ratione sinuum. Quod si aliæ etiam sphæroides adhuc densiores, ac diversis semiaxibus descriptæ circa nuclei centrum adjici intelligantur, singularum attractiones in punctum M eadem lege augebuntur. Duarum itaque sphæroidum differentia, seu stratum sphæroidicum, quo differunt, attrahet eadem lege: & si Terra omnis ex stratis sphæroidicis, ac concentricis coalescat, quorum densitas a superficie pergendo ad centrum in ratione quavis augeatur; adhuc in ipsa superficie sphæroidis accedendo ad polos summa omnium virium, sive absolutum pondus augebitur in duplicata ratione sinuum latitudinis.

Corollarium I.

Si inclusus nucleus materia circumposita sit rarior, differentia Δ densitatum negative accipienda erit, & differentia attractionis sub æquatore, & in loco quocumque M, adhuc proportionalis erit quadrato sinus latitudinis puncti ejusdem M, eademque sem-

ſemper habebitur attractionis lex, ſi in aliis, atque aliis nucleis interioribus denſitas utcumque minui intelligatur, aut ſi etiam nucleus intimus materia omni ſit vacuus, & fiat $\Delta = -t$. In quacumque igitur hypotheſi ſphæroidis ex ſtratis quibuslibet ſphæroidicis compoſitæ, denſitatiſque in ratione quavis accedendo ad centrum creſcentis, vel decreſcentis, differentia omnium virium, ſive abſoluti ponderis ſub æquatore, & in loco alio quolibet extimæ ſuperficiei proportionalis erit quadrato ſinus latitudinis.

Corollarium II.

Quia differentiæ pendulorum eodem tempore oſcillantium proportionales ſunt differentiis ponderum, in hypotheſi quavis Terræ ſphæroidicæ, & homogeneæ, aut ex ſtratis ſphæroidicis hetherogeneis compoſitæ, aut nucleum ſphæricum, vel ſphæroidicum denſiorem in centro habentis, longitudines ipſæ pendulorum ab æquatore pergendo ad polos augeri poterunt in duplicata ratione ſinuum latitudinis, ſive in ratione ſimplici dimidiorum ſinuum verſorum latitudinis bis acceptæ. Quod ſi igitur lex hujuſmodi longitudinis pendulorum eodem ubique tempore oſcillantium inſtitutis experimentis proxime ſatisfaciat, hypotheſis aliqua Terræ ſphæroidicæ, & ex ſtratis aliis ſphæroidicis compoſitæ aſſumi poterit, qua ſimul phænomena omnia hujus generis explicentur.

Corollarium III.

Si longitudo penduli ſub æquatore ſecundis ſingulis oſcillantis ſit linearum 439. 21, & ſub latitudine 66° 48′ ſit lin. 441. 27, quemadmodum accuratiſſimis experimentis deprehenſum eſt, eadem poſita lege ponderum, differentiam linearum 2. 06 augendo in duplicata ratione ſinus totius ad ſinum 66° 48′ fiet differentia longitudinis pendulorum uno ſecundo oſcillantium ſub æquatore, & polis lin. 2. 44, & tota longitudo penduli iſochroni ſub polis lin. 441. 65. Jam vero ſi in hypotheſi Terræ totius fluidæ, & homogeneæ fiat $230 : 231 = 439.21 : 441.12$, longitudo penduli iſochroni ſub polis lin. 0. 53 prodibit minor quam ex priori analogia eruatur. Quæ differentia cum major ſit quam ut in errores inſtitutarum obſervationum refundi poſſit, extra homogeneitatis, & æquilibrii caſum hypotheſes aliæ quærendæ erunt, quæ & proportioni ſimul, & quantitati creſcentium ponderum ſatisfaciant.

Pro-

PROBLEMA IX.

Determinare hypotheſes ſimpliciores, quæ & quantitati ſimul, & proportioni ponderum ab æquatore pergendo ad polos creſcentium in duplicata ratione ſinuum latitudinis proxime ſatisfaciant.

Si circa Terræ centrum ſit nucleus aliquis ſphæricus, & nuclei radius vocetur c, ac ſit Δ differentia denſitatis nuclei, & materiæ circumpoſitæ; perinde ſe habebunt pondera in extima ſuperficie ac ſi homogenea eſſet Terra omnis, ipſique in centro adderetur nucleus radii c, & denſitatis Δ. In hac autem hypotheſi, manentibus præcedentibus aliis denominationibus eſſe oporteret

attractio ſub æquatore $\frac{2}{3}pC + \frac{2}{5}pB + \frac{2p\Delta c^3}{3(C+B)^2}$,

abſolutum pondus $\overline{1-\frac{1}{g}} \cdot \left(\frac{2}{3}pC + \frac{2}{5}pB + \frac{2p\Delta c^3}{3C^2} - \frac{4p\Delta Bc^3}{3C^3}\right)$,

pondus ſub polis $\frac{2}{3}pC + \frac{8}{15}pB + \frac{2p\Delta c^3}{3C^2}$,

ponderum differentia $\frac{2}{15}pB + \frac{4p\Delta Bc^3}{3C^3} + \frac{2pC}{3g} + \frac{2p\Delta c^3}{3gC^2}$.

Quare ſi ratio C : B ea aſſumatur, quæ in priori libri hujus capite ex omnibus graduum obſervationibus media fere prodiit, videlicet 230 : 1, & ſi longitudo penduli uno ſecundo temporis oſcillantis ſub æquatore aſſumatur linearum 439. 21, atque, ut ferunt experimenta omnia, ab æquatore pergendo ad polos longitudo eadem augeatur in duplicata ratione ſinuum latitudinis, & ſub polis incrementum omne eſſe debeat lin. 2. 44, fiet

$$\overline{1-\frac{1}{g}} \cdot \left(C + \frac{3}{5}B + \frac{\Delta c^3}{C^2} - \frac{2\Delta Bc^3}{C^3}\right) : \frac{1}{5}B + \frac{2\Delta Bc^3}{C^3} + \frac{C}{g} + \frac{\Delta c^3}{gC^2} = 43921 : 244.$$

Poſito igitur $g : 1 = 288\frac{1}{2} : 1$, & $C : B = 230 : 1$ variæ prodibunt hypotheſes, & radii c, & denſitatis Δ nuclei ſphærici, quibus datis ab æquatore pergendo ad polos augebuntur pondera in duplicata ratione ſinuum latitudinis, atque ea ſimul incrementi totius quantitas habebitur, quæ pendulorum experimentis reſpondeat.

COROLLARIUM I.

Si radius nuclei denſioris exæquet minorem ſemiaxem Terræ, & fiat $C = c$, erit etiam

$$\overline{1 - \frac{1}{g}} \cdot \left(C + \frac{3}{5}B + \Delta C - 2\Delta B\right) : \frac{1}{5}B + 2B + \frac{C}{g} \cdot \overline{1 + \Delta} = 43921 : 244,$$

factiſque aliis ſubſtitutionibus, & reductis numeris prodibit $\Delta = \frac{1}{5\frac{1}{2}}$ circiter: nimirum ſi nucleus ſphæricus uſque ad Terræ polos pertingat, & paulo minus quam quinta parte denſior intelligatur materia omni, quæ circa æquatorem redundat, ſimpliciſſima habebitur hypotheſis, qua & proportioni, & quantitati ſimul creſcentium ponderum proxime ſatisfiet.

COROLLARIUM II.

His etiam poſitis, & reaſſumpta formula ſexti problematis, cum $\frac{2}{3}pC^3$ ſit ſoliditas nuclei ſphærici a centro Terræ ad polos uſque pertingentis, erit pro qualibet diſtantia a centro, & latitudine Terræ attractio

$$\frac{2pC^3}{3a^2} \cdot \overline{1 + \Delta} + \frac{4pC^2B}{3a^2} + \frac{2pC^4B}{5a^4} \cdot (1 - 3T^2):$$

& ſub æquatore, poſito $T = 0$, evadet

$$\frac{2pC^3}{3a^2} \cdot \overline{1 + \Delta} + \frac{pC^2B}{a^2}\left(\frac{4}{3} + \frac{2C^2}{5a^2}\right).$$

COROLLARIUM III.

Quod ſi igitur fiat primum $a = C + B$, & deinde $a = C + B + b$, quantitas autem b ſit exigua, & negligi poſſint producta quantitatum B, & b, erit gravitas in ſuperficie Terræ ſub æquatore ad gravitatem in altitudine b ſupra ipſam ut

$$\frac{1}{3} \cdot \overline{C - 2B} \cdot \overline{1 + \Delta} + \frac{13}{15}B : \frac{1}{3} \cdot \overline{C - 2B - 2b} \cdot \overline{1 + \Delta} + \frac{13}{15}B,$$

& gravitas eadem omnis ſub æquatore erit ad gravitatis decrementum, quod ad diſtantiam b aſſurgendo altius habebitur, ut

$$\overline{C - 2B} \cdot \overline{1 + \Delta} + \frac{13}{5}B : 2b \cdot \overline{1 + \Delta}.$$

Co-

COROLLARIUM IV.

Si fiat ut antea $\Delta = \frac{1}{5\frac{1}{2}}$, $1 + \Delta = 1.18$, $C = 3265909$, $B = 14199$, & altitudo b assumatur hexapedarum 2434, substitutis numeris fiet eadem ratio 3857340 : 5744. Quod si igitur longitudo penduli uno secundo oscillantis sub æquatore assumatur linearum 439.21, addendoque $\frac{1}{287.5}$, sive 1.53, & seposita vi centrifuga, sit 440.74 longitudo, quæ absolutæ gravitati respondet, eaque diminuatur in ratione gravitatum absolutarum, dematurque rursus, quod competit vi centrifugæ; longitudo penduli uno secundo oscillantis in altitudine hexap. 2434 supra æquatorem erit linearum circiter 438.55 : & simili modo in altitudine hexap. 1466 erit longitudo lin. 438.8.

COROLLARIUM V.

Si in vertice montium hexapedis 2434, & 1466 supra terrestrem superficiem sub æquatore assurgentium longitudines pendulorum secundis singulis oscillantium sint vere linearum 438.69, & 438,88, supererunt 0.14, & 0.08, quæ debeant tribui attractioni montium in vertice quidem conspirantis cum eadem gravitatis directione, ad radices vero non nisi horizontaliter pendulum distrahentis. Et cum attractio montis hemisphærici in vertice manifeste major sit attractione dimidia sphæræ integræ, sphærarum vero attractiones proportionales sint radiis, & densitatibus, si mons ipse hemisphæricus hexapedas 2434 pro radio habeat, & sit interiori nucleo homogeneus, parte circiter 0.16 longitudinem penduli secundis singulis oscillantis augere poterit.

COROLLARIUM VI.

Generatim vero cum Terræ totius attractio minuatur proxime in duplicata ratione auctæ distantiæ a centro, & sit attractionis terrestris decrementum in montis cujusvis vertice ad attractionem totam in superficie Terræ ut dupla altitudo montis ad Terræ radium, atque in hypothesi montis hemisphærici, & Terræ homogeneæ, attractio montis in vertice ad attractionem Terræ se habeat in majori ratione quam dimidia altitudo montis ad Terræ radium, & densitas montis ad densitatem Terræ; manifestum est quod si den-

densitas montis quadruplo major sit densitate Terræ plus virium ob attractionem montis accedet, quam ob majorem a centro distantiam deficiat, auctaque adhuc densitate longitudo penduli in vertice longitudinem penduli alterius ad radices montis isochroni data quantitate aliqua superare poterit.

Corollarium VII.

Quod si itaque colligamus jam simul omnia, & sepositis aliis primitivæ fluiditatis, & æquilibrii hypothesibus curvitatem terrestris superficiei comparatis inter se invicem mensuris graduum directe investigemus, proxime assumi poterit figuram Terræ eam esse, quam diurno motu circa axem se se volvendo sibi comparasset si homogenea, & fluida fuisset omnis, sphæroidem scilicet oblatam, cujus semiaxis minor per polos transiens ad æquatoris radium se habeat ut 230:231, quemadmodum in priori libri hujus capite explicatum est. Et si insuper juxta postremas duas propositiones statuamus solidam terram sic comparatam esse, ut densitas sphæræ inscriptæ quinta circiter parte superet densitatem materiæ alterius circumpositæ, & circa æquatorem redundantis; satisfiet etiam experimentis pendulorum ab æquatore ad polos notis differentiis crescentium, ut suas oscillationes singula eodem tempore absolvant. Denique in hisce ipsis hypothesibus satis accurate explicari poterit decrementum longitudinis pendulorum eodem tempore oscillantium quod assurgendo ad montium vertices accuratioribus experimentis innotuit: poterit tamen quandoque fieri ut longitudines ipsæ in summis verticibus aut eædem, aut minores etiam prodeant, quam ad radices montium, quemadmodum in posteriori corollario adnotatum est.

Scholion I.

Newtonus in Propos. XIX. Lib. III. Princip., Hugenius in additamento dissertationis de caussa gravitatis, & Hermannus Lib. II. Phoronomiæ inquisierunt figuram illam, quam Terra haberet si aut canalibus aqua plenis, & ad centrum continuatis constaret, aut tota ejus massa in aquam resoluta foret, aut in primordiis rerum materia fluida, & gravi coaluisset, & circa se ipsam cœpisset converti, ut singillatim a Newtono ipso, Hugenio, & Hermanno indicatum est. Et quidem Newtonus cum gravitatem particularum omnium statuisset distantiarum quadratis reciproce proportionalem; ex quo differentiæ ponderum proportionales sint differentiis semiaxium sphæroidum, collegit diurnæ rotationis axem, & diametrum æquatoris

esse

esse inter se ut 229:230. Hugenius vero, & Hermannus secuti hypotheses alias gravitatis constantis, aut ubique proportionalis distantiæ a centro sphæroidis, proportionem semiaxium eruerunt 577:578, quæ binæ hypotheses dissentiunt a Newtoniana lege, in qua non quidem sub æquatore, & in polis, ac in locis aliis sphæroidis, sed accedendo dumtaxat directe ad centrum infra extimam superficiem est gravitas distantiæ simplici proportionalis. Newtonus etiam in corollario Propos. XXXVI. Lib. III. facta eadem hypothesi Terræ primitus fluidæ, & homogeneæ, ex proportione vis centrifugæ sub æquatore Terræ ad vim perturbatricem Solis collegit differentiam semiaxium Terræ ob vim Solis esse oportere unius pedis, & digitorum $11\frac{1}{30}$: ac deinde in Propos. XXXVII. ex proportione maximorum, minimorumque æstuum maris post syzigias, & quadraturas eruit vim Solis ad Lunæ ad vim se habere ut 1:4.4815, adeoque differentiam semiaxium esse ob vim Lunæ pedum $8\frac{3}{5}$. Præterea cum quantitates materiæ in Terra, & Luna statuisset esse inter se ut 39.788:1, atque in Propos. XXXVIII. censuisset differentiam semiaxium Lunæ ob vim Terræ ad differentiam semiaxium Terræ ob vim Lunæ se habere ut gravitas acceleratrix Lunæ in Terram ad gravitatem acceleratricem Terræ in Lunam, & diameter Lunæ ad diametrum Terræ conjunctim; differentiam semiaxium Lunæ fluidæ, & homogeneæ invenit esse ob vim Terræ pedum dumtaxat 93. Ita Newtonus statuit initio Lunam sphæroidis oblongæ formam induisse, & majorem sphæroidis axem obverti Terræ, & oscillando, ubi retrahatur, ad Terram semper redire.

At præterquam quod ex proportione maximorum, minimorumque æstuum minus accurate, ut inferius videbimus, proportio virium Solis, & Lunæ, massarumque Lunæ, ac Terræ erui posset, accedit, quod in Coroll. III. Probl. VII. demonstratum est, differentiam semiaxium Terræ fluidæ, & homogeneæ ex attractione Lunæ ortam ad differentiam semiaxium Lunæ ortam ex attractione Terræ se habere in ratione non simplici, sed duplicata quantitatis materiæ Lunæ ad quantitatem materiæ Terræ, & conjunctim in ratione non simplici, sed quadruplicata diametri Terræ ad Lunæ diametrum. Unde si ratio massarum Lunæ, & Terræ esset 1:39.788, radiorum vero 20:73, & differentia semiaxium Terræ ob vim Lunæ assumeretur pedum $8\frac{3}{5}$, differentia semiaxium Lunæ ob vim Terræ, fieret pedum dum-

dumtaxat 76. Quod etiam ex corollario secundo problematis ejusdem septimi colligitur, si scilicet loco 62.8 scribamus 39.788. At si proportio absolutarum virium, massarumque Terræ, & Lunæ assumatur ut ex certissimis phænomenis præcessionis æquinoctiorum, & nutationis terrestris axis eruitur, differentia quæsita evadet pedum 120 circiter, auctaque differentia fiet gravius argumentum illud, quo Newtonus conjecerat Terræ attractione fieri ut fere eadem Lunæ facies constanter Terræ obvertatur. At cum libratio Lunæ, & quæ in latum, & quæ in longum fit, ut ex parallelismo lunaris axis, & motu Lunæ æquabili circa axem, & inæquabili circa Terram colligitur, satis respondeat phænomenis macularum, quemadmodum initio antecedentis libri explicatum est, nihil omnino relinquitur, quod Terræ majorem Lunæ diametrum perpetuo ad se volventi, & inde ortis oscillationibus tribuamus. Et ne suspicemur motum rotationis non quidem initio Lunæ, & Planetis aliis cum motu periodico fuisse impressum, sed ex hujusmodi oscillationibus paulatim successu temporis profluxisse vetat ipsa positio axis, circa quem Lunæ rotatio absolvitur, quique ad planum lunaris orbitæ sensibiliter inclinatur ut libri antecedentis initio pariter notatum est. Patet enim quod cum in hypothesi Lunæ fluidæ major axis, qui Terræ obvertitur, in plano lunaris orbitæ jacere debeat, motus omnis oscillatorius in aberratione axis ipsius a Terra deberet omnino fieri circa axem alium vectori radio, & plano lunaris orbitæ perpendicularem.

At vero hisce etiam omissis prioris hypotheseos consectariis perpendendum est hypothesim illam primitivæ fluiditatis, cui theoria lunaris, & terrestris corporis a Newtono tradita innititur, & penitus confictam esse, & dissimilitudinis terrestrium stratorum phænomenis parum consonam. Si enim particulæ omnes terrestres fuissent aliquando fluidæ, impresso etiam diurno motu, particulæ densiores ordine ad centrum propius accessissent, omnino autem in eodem strato non aliæ se composuissent, quam æque densæ, & homogeneæ. Quo dato quæcumque postmodum mutationes, & quibuscumque de caussis in terra subortæ essent, nullo modo posset intelligi adeo confusa, & permixta fuisse omnia, ut nullum penitus in subterraneis quibusvis stratis vestigium superfuerit primitivæ similitudinis. Patet utique quod Bouguerius Sect. VII. §. XXXII. de Figura Terræ adnotaverat, maria, & lacus, & stagnantes liquores omnes perinde ad æquilibrii leges componi ac si canalibus traductis ad centrum usque inter se communicarent: atque ex hujusmodi principio

colligi

colligi etiam posset quod si fluida telluris portio, quæ ad æquilibrii leges componitur, proxime saltem accedat ad libellam, ac formam planæ terrestris superficiei, totius telluris forma non admodum ab illa abludet, quæ in eadem fluiditatis hypothesi haberetur. At primo facta hujusmodi hypothesi strata omnia concentrica deberent esse in partibus singulis homogenea, secus ac omnibus stratorum observationibus innotuerit. Deinde vero in dubium verti posset utrum, & quantum a figura terrestrium meridianorum recedat marium superficies. Quare satius erat non quidem ex pendulorum experimentis, & hypothesibus æquilibrii colligere figuram Terræ, eamque cum institutis mensuris graduum comparare, sed ex mensuris ipsis, observationibusque figuram meridianorum terrestrium directe investigare, ut in priori libri hujus capite factum est, ac deinde traditis æquilibrii legibus inquirere quæ interni textus hypothesis simplicior sit, & phænomenis pendulorum undique satisfaciat.

SCHOLION II.

Richerius anno 1672. cum in Cayennæ insula latitudinis borealis 4° 55' fixarum transitum per meridianum observaret, agnovit pendulum quod singulis secundis temporis oscillationem unam absolvebat Parisiis, tardius moveri, unaque linea cum quadrante corripiendum fuisse ut ibi pariter secundis singulis oscillaret. Newtonus in Propos. XX. Lib. III. animadvertit non omnem hanc differentiam imminutæ gravitati esse adscribendam, sed sextam lineæ partem deberi caloris vi, qua prope æquatorem penduli virga producitur. Hallejus postmodum, Varinius, Campbellus, aliique plures retardationem penduli prope æquatorem, & gravitatis imminutionem repetitis experimentis confirmarunt. Bouguerius Sect. VI. §. VII. adhibitis correctionibus omnibus caloris, sublataque aeris resistentia longitudinem penduli simplicis uno secundo oscillantis statuit Parisiis quidem linearum 440. 67, sub æquatore vero, & in ipsa maris libella lin. 339. 21: ad *Portobello* in America lin. 439. 30, & in insula S. Dominici ad *Petit-Goave* lin. 439. 47. Maupertuisius collatis experimentis deprehendit pendulum parisiense eumdem oscillationum numerum 7. 7'' Londini, & 59'' Pelli in Lapponia citius quam Parisiis pro singulis fixarum revolutionibus absolvere: unde cum revolutio fixarum sit 23ʰ 56' 4'', & gravitates acceleratrices sint reciproce ut quadrata temporum oscillationum numero æqualium ejusdem penduli, erunt gravitates acceleratrices, & longitudines pendulorum eodem tempore oscillantium Parisiis, Londini, & Pelli inter se reciproce ut qua-

drata numerorum 86164, 86156.3, 86105, five directe ut 100000, 100018, 100137: adeoque erit longitudo penduli fimplicis uno fecundo temporis ofcillantis Londini quidem lin. 440.75, Pelli autem 441.27. Caillius in Africa, atque in latitudine Auftrali 33° 18', ad Promontorium Bonæ Spei, eadem methodo Bouguerii ufus, ut in Actis Berolinenfibus anni 1754 legitur, longitudinem penduli ifochroni invenit 440.14. Romæ in latitudine 41° 53' 54'' Newtoni interpretes celeberrimi le Seur, & Jacquier in notis ad Propof. XX. Lib. III. longitudinem penduli definierunt digitorum Londinenfium 39.0974, five, pro varia affumpta Londinenfis pedis ad Parifienfem ratione, linearum Parifienfium 440.28, aut 400.3888. Clarifs. Liefganig Viennæ in latitudine 48° 12' 34½'' longitudinem penduli invenit lin. 440.562. Grifchowius To. VI. Novorum Commentariorum Petropolitanæ Academiæ Petropoli altitudinem poli conftituit 59° 56' 20'', & To. VII. longitudinem penduli lin. 441.23.

Ita vero fi inventæ longitudines pendulorum uno fecundo temporis in locis fingulis ofcillantium comparentur inter fe invicem, patebit earumdem incrementa ab æquatore ad polos pergendo augeri quam proxime in duplicata ratione finuum latitudinis, five effe dimidiis finubus verfis duplæ latitudinis proportionalia. Longitudinum differentiæ ad Promontorium Bonæ Spei, & Petropoli fere intra quintam lineæ unius partem ab eadem ratione videntur aberrare. Experimenta etiam Revaliæ, Dorpati, Pernaviæ, & Arensburgi, quæ fingula Grifchowius tomo eodem feptimo copiofe retulit, aliquantulum inde difcrepant. Nam cum in hypothefi longitudinis penduli ifochroni, & gravitatis acceleratricis corporum crefcentis in duplicata ratione finuum latitudinis, pro differentia dimidii gradus, Petropoli Revaliam ufque, pendulum fimplex fecundis fingulis ofcillans una fixarum revolutione duabus ofcillationibus retardari debeat, retardatio diurna ofcillationum $9\frac{4}{5}$ inventa eft: & cum Petropoli Pernaviam, & Dorpatum ufque, pro differentia $1\frac{1}{2}$°, retardatio diurna ofcillationum $5\frac{1}{4}$ pro eadem hypothefi effe debeat, inventa eft ofcillationum Pernaviæ quidem $10\frac{1}{2}$, Dorpati autem 9: ac denique Petropoli Arensburgum ufque in infula Ofiliæ, pro differentia $1\frac{2}{3}$°, retardatio diurna non 6 ofcillationum juxta hypothefim, fed $14\frac{1}{2}$ inventa eft. Caillius in Actis Berolinenfibus anni 1753 experimenta fub æquatore, Parifiis, & Pelli ultra polarem circulum inftituta eo diligentiæ perducta effe cenfuit ut intra octavam lineæ unius partem veram penduli longitudinem exhibuerint: nec in aliis experimentis ad Promontorium Bonæ Spei a fe habitis

tis

tis latiores errorum limites esse voluit. Si in extremis observationum locis Pelli, & sub æquatore longitudinum differentia assumatur lin. 2.06, eaque pro locis aliis minuatur in simplici ratione dimidii sinus versi latitudinis bis acceptæ, differentiæ aliæ longitudinum, & totæ longitudines pendulorum, dissensusque ab experimentis erunt ut in tabula sequenti

Observationum Locus	Latitudo Loci	Longitudo Penduli	Longitudinis Incrementum	Dimidius Sinus versus	Proportio Sinuum	Differentiæ Observationum
Sub æquatore	0.	439. 21. lin.				
Ad *Portobello*	9.° 34.'	439. 30.	0. 09.	2762.	0. 07.	0. 02.
Ad *Petit Goave*	18. 27.	439. 47.	0. 26.	10015.	0. 25.	0. 01.
Ad Promont. B.S.	33. 18.	440. 14.	0. 93.	30142.	0. 74.	0. 19.
Romæ	44. 54.	440. 38.	1. 17.	44600.	1. 09.	0. 08.
Viennæ	48. 12 ½.	440. 56.	1. 35.	55587.	1. 35.	0.
Parisiis	48. 50.	440. 67.	1. 46.	56684.	1. 38.	0. 08.
Londini	51. 31.	440. 75.	1. 54.	61275.	1. 50.	0. 04.
Petropoli	59. 56 ⅓.	441. 23.	2. 02.	74912.	1. 83.	0. 19.
Pelli	66. 48.	441. 27.	2. 06.	84480.		

Quare dissensus omnis differentiæ longitudinis pendulorum a duplicata ratione sinuum latitudinis intra limites illos consistere videtur, qui observationum diligentiam definiunt, & qui aliquanto major dissensus Petropoli, & ad Promontorium Bonæ Spei prodiit peculiarem aliquam interni textus irregularitatem indicare posset, quæ licet præ tota telluris massa sit exigua, tamen exiguam aliquam ponderum a generali lege aberrationem in locis illis exhibeat. Idem omnino dicendum est de variationibus illis, quæ in aliis Ingriæ locis non adeo inter se dissitis prodierunt. At vero cum in sphæroide quavis homogenea, aut ex stratis sphæroidicis, & prope centrum densioribus compositæ, corporum pondera ab æquatore pergendo ad polos augeri debeant in duplicata ratione sinuum latitudinis; observata incrementi quantitas major est quam qui haberetur in sphæroide homogenea, in qua semiaxes bini inter se essent ut 230 : 231. Hanc autem ipsam proportionem semiaxium proxime saltem exhibent mensuræ terrestrium graduum, aut non magis inde dissentiunt quam ferat aliqua observationum incertitudo, & actio montium altissimorum, & aliqua texturæ terrestris ir-

regularitas, ut in priori capite dictum est. Retenta igitur hac ipsa proportione semiaxium, & sepositis primitivæ fluiditatis, & æquilibrii solidarum partium hypothesibus, in posteriori problemate hypotheses alias proposuimus, quibus & proportioni simul, & quantitati crescentium ponderum satisfieret. Atque ea quidem simplicior hypothesis visa est, qua interior nucleus quinta circiter parte densior statueretur materia omni, quæ circa æquatorem Terræ, atque extra inscriptam sphæram redundat. Newtonus in Propos. X. Lib. III. communem supremam Terram quasi duplo graviorem aqua esse censuit, & paulo inferius in fodinis quasi triplo etiam, aut quadruplo, & quintuplo graviorem: unde satis verosimile existimavit quantitatem materiæ in Terra quintuplo aut sextuplo majorem esse quam si tota ex aqua constaret. Quod si igitur consideremus sub æquatore ampliora, & profundiora esse maria, quam prope polos, verosimillimum videbitur densitatem mediam totius nuclei quinta saltem sui parte majorem esse densitate totius Terræ circumpositæ, ut explicando incremento ponderum sufficit. Mox ostendemus quod si solida omnis materies extra inscriptam sphæram redundans exæquet duas tertias partes materiæ redundantis similiter in hypothesi Terræ totius solidæ, & ubique ejusdem cum nucleo densitatis, satisfiet etiam aliis phænomenis nutationis terrestris axis, & præcessionis æquinoctiorum.

Scholion III.

Bouguerius citato in loco cum longitudinem penduli secundis singulis oscillantis sub æquatore, & in ipsa maris libella constituisset linearum 439. 21, repetitis postmodum experimentis Quiti, quæ Urbs hexapedis 1466 supra libellam maris attollitur, longitudinem penduli isochroni invenit esse lin. 438. 88, & in vertice montis Pichincha, hexapedis 2434 supra eamdem libellam, lin. 438. 69. Quæ duo cum legibus attractionis Terræ sphæroidicæ proxime conveniunt ubi quidpiam attractioni utriusque montis tribuamus, quemadmodum in Coroll. V. Probl. IX. notatum est. Jam vero in ephemeridibus Gallicis anni 1769, & 1771 memoriæ prodiit in quibusdam Alpium locis gravitatem acceleratricem corporum supra terrestrem superficiem altius assurgendo potius augeri, differentias ejusdem gravitatis fere esse proportionales elevationibus locorum, & adeo esse sensibiles ut in altitudine hexapedarum 1085 pendulum secundis singulis ad radices montis oscillans accelerationem 28'' binis mensibus exhibuerit. Cl. d'Alembert tomo sexto opusculorum

optime

optime indicavit quod si quæ vere habeantur hujus generis phænomena, quibusdam hypothesibus assumptis densitatis montium, cum theoria attractionis universalis possent undique conciliari. Et quidem suppositis montibus aut conicis, aut hemisphæricis facile admodum est densitatis, & hypothesium aliarum limites assignare. Primo enim patet attractionem peripheriæ circularis radii y in corpusculum aliquod quantitate z supra centrum, & perpendiculariter plano circuli elevatum esse $py.\frac{z}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, & attractionem annuli circularis latitudinis $-dy$ esse $-\frac{pzydy}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, integrandoque, & constantem quantitatem sic addendo ut posita $y=0$ attractio omnis evanescat, esse attractionem totius circularis plani $p\left(1-\frac{z}{\sqrt{(y^2+z^2)}}\right)$. Patet deinde quod si mons aliquis figuræ conicæ altitudinis b, & densitatis δ proponatur, atque altitudo montis ad radium baseos se habeat ut $1:m$, erit attractio sectionis cujusvis horizontalis in verticem exercita

$p\delta.dz\left(1-\frac{z}{\sqrt{(z^2+m^2z^2)}}\right)$, & montis totius attractio

$p\delta b\left(1-\frac{1}{\sqrt{(1+m^2)}}\right)$. Patet denique quod si fiat $y^2=2bz-z^2$, erit elementum attractionis sphæræ $p\delta.dz\left(1-\frac{z}{\sqrt{(2bz)}}\right)$, atque in integrali $p\delta\left(z-\frac{2z^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2b}}\right)$ ponendo primum $z=b$, ac deinde $z=2b$, fiet attractio montis hemisphærici $p\delta b\left(1-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$, & attractio sphæræ integræ $\frac{2}{3}p\delta b$. His positis si $1:\delta$ sit ratio mediæ densitatis Terræ ad densitatem montis, & $1:b$ sit ratio mediocris Terræ radii ad montis altitudinem, erit attractio Terræ in vertice $\frac{\frac{2}{3}p}{(1+b)^2}$, & decrementum attractionis Terræ æquabitur ad-

ditæ

ditæ montis attractioni, si in hypothesi montis hemisphærici fuerit $\frac{4}{3} p b = p \delta b \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3} \right)$, sive $\delta = \frac{4}{3 - \sqrt{2}}$, & in hypothesi montis conici si fiat $\delta = \frac{4}{3\left(1 - \frac{1}{\sqrt{(1+m^2)}}\right)}$. In posteriori vero hac hypothesi, quæ rectius fortasse montium figuram exhiberet, si radius baseos, exempli causa, altitudinem montis triplo excederet, esset $\delta = \frac{8}{3}$, fieret vero $\delta = \frac{4}{3}$ si radius ipse tam esset magnus ut præ ipso montis altitudo negligi debeat. In utraque autem hypothesi differentia attractionum esset altitudini b, sive elevationi loci propositi supra terrestrem superficiem proportionalis: & quia tempora oscillationum ejusdem penduli sunt in ratione reciproca subduplicata gravitatum acceleratricium, atque insuper in imis vallibus horizontales circumpositorum montium actiones maxima saltem ex parte compensare debent se se invicem, verticalium dumtaxat virium ratione habita facile admodum supputari poterit quæ montis densitas datæ accelerationi penduli ad datam altitudinem respondeat. Hæc autem omnia hoc in loco indicasse tantum suffecerit. Notitiis enim conquisitis undique accepi alpina illa experimenta in Diario quodam, ut vocant Enyclodico, relata omnino esse supposita, & circa differentiam attractionum in vertice, & ad pedes montium Bouguerii tantum experimenta superesse quæ in investigationibus figuræ terrestris locum aliquem semper habere debeant.

DE THEORIA DIURNI MOTUS.

LIBER TERTIUS.


Eferat ANB*n*, fig. 32., Terræ æquatorem, & CN*n* planum Eclipticæ, ac ſit communis duorum planorum interſectio, ſive nodorum linea N*n*. Fiat motus apparens Solis juxta ordinem Signorum ex N in A, & *n*: denotet N punctum æquinoctii verni, ſive aſcendentem nodum æquatoris, quo ſcilicet emenſo Sol ab æquatore boream verſus declinat: & ſit *n* punctum æquinoctii autumnalis, ſeu nodus deſcendens, quo emenſo Sol latitudinem auſtralem habet. Obſervatum eſt puncta hujuſmodi æquinoctialia N, *n* contraria directione regredi in N', *n*': qui motus dicitur præceſſionis æquinoctiorum, quod ita Sol a punctis C, aut B viſus digredi ad puncta æquinoctialia citius revertitur, quam ſi eadem ſemper maneret eclipticæ, & æquatoris interſectio N*n*. Vocatur autem præceſſio media æquinoctiorum ea præceſſionis quantitas, quæ haberetur ſi ſumma præceſſionis totius periodicæ divideretur in ſimplici ratione temporis: æquatio autem præceſſionis dicitur, quæ dato tempori reſpondet & mediæ hujus, & veræ præceſſionis æquinoctiorum differentia.

Regreſſionem mediam punctorum æquinoctialium in plano Eclipticæ Caillius, aliique Aſtronomi ſtatuerunt annis ſingulis $50.3''$. Quare cum tempus reverſionis Solis ad eamdem fixam, ſive annus ſidereus ſit $365^d\ 6^h\ 9'\ 8''$, arcus ſecundorum 50.3 a Sole abſolvetur tempore $20'\ 25''$, ſive erit tempus reverſionis Solis ad idem æquinoctii punctum $365^d\ 5^h\ 48'\ 43''$. Ita vero regredientibus punctis æquinoctialibus, dataque inclinatione media eclipticæ ad æquatorem, manifeſtum eſt æquatoris axem circa axem eclipticæ duas conicas ſuperficies ſibi invicem in centro obverſas deſcribere, & æquatoris polum P, fig. 31., circa E polum eclipticæ $50.3''$ annis ſingulis promoveri oportere ab oriente in occidentem: quo poſito ſtellæ fixæ in circulis ad eclipticam parallelis

lelis contrario ordine progredi videbuntur 50. 3'' annis singulis, & longitudinem, quæ a primo Arietis puncto supputatur majorem semper acquirere, atque integram revolutionem tempore annorum 25663, ac 4 circiter mensium absolvere. Id a priori Astronomiæ ætate, & ab Hipparchi usque temporibus innotuit.

Bradlejus Astronomorum nostræ ætatis maximus, cui aberrationem lucis primo agnitam debemus, continuatis 20 annorum observationibus, æquationem quamdam apparentis fixarum motus detexit, quam nutationem poli, & axis Terræ appellavit, quamque ad 9'' usque circuli maximi quandoque assurgere invenit, & eamdem periodum habere, qua revolutio nodorum lunaris orbitæ in plano eclipticæ absolvitur, scilicet annorum 18, & 7 mensium. Phænomenon hujusmodi Bradlejus in litteris ad Macclesfieldum datis anno 1747 descripsit. Machinius vero indicavit qua hypothesi intra 2'' satisfieri possit legibus, ac variationibus omnibus Phænomeni. Centro P, qui sit locus medius poli æquatoris, & radio PA qui exæquet 9'' circuli unius maximi, describatur circulus ABCD, intelligaturque is a vero æquatoris polo describi motu retrogrado, & regressioni nodorum lunaris orbitæ sic analogo, ut si PF sit colurus solstitiorum, PL vero coluris æquinoctiorum, æquatoris polus sit in A quando nodus ascendens lunaris orbitæ reperitur in primis Arietis punctis L, ac deinde in B sit polus quando ad prima Capricorni puncta H nodus pervenit, atque ita ille ad C, & D transeat dum hic fertur ad prima Libræ, & Cancri puncta G, & F. Addidit etiam in memorata epistola Bradlejus observationibus accuratius satisfieri si circulo ABCD substituatur ellipsis, cujus major axis AC in plano coluri solstitiorum jaceat, & sit 18'' circuli unius maximi, alter vero axis BD in plano coluri æquinoctiorum positus sit tantum 16''.

Newtonus in Propos. XXXIX. Lib. III. Princip., non adhuc agnita nutatione, motum præcessionis æquinoctiorum ex caussis physicis, atque ex legibus attractionis Solis, & Lunæ in Terram, derivare omnium primus aggressus est. Cum enim ipse in Propos. XXX. motum horarium nodorum Lunæ in circulari orbita Solis actione genitum supputasset, collegit inde qui esset motus medius nodorum Lunæ alterius, quæ in ipso æquatoris terrestris plano, eodemque periodico tempore simul cum Terra circa centrum revolvi intelligatur. Omnia huc redeunt quod si $1:t$ sit ratio temporum diurnæ, & annuæ revolutionis Terræ, & sinus inclinationis æquatoris ad planum eclipticæ vocetur π, esset $\frac{3}{4t}\sqrt{(1-\pi^2)}.360°$ motus annuus

nuus nodorum Lunæ alicujus fictitiæ in ipso æquatoris plano diebus singulis revolutæ: ut etiam ex Coroll. II. & III. Probl. I. Lib. III. prioris Partis colligitur si loco $\frac{n}{1}$, quæ est ratio temporum periodicorum Lunæ, & Solis, substituatur $\frac{1}{t}$. Deinde hypotheseos loco assumpsit Newtonus quod si plures Lunæ in eodem plano æquatoris, eodemque periodico tempore circa Terram revolverentur, singillatim acceptæ singulæ, aut simul junctæ ad annulum solidum componendum circa æquatorem, eumdem adhuc haberent medium, & annuum nodorum motum: quodque adeo si materies omnis, quæ in Terra extra inscriptam sphæram redundat, ad annulum solidum reduceretur æquatori ipsius sphæræ circumpositum & diurno motu circumvolutum, adhuc motus nodorum annuus esset $\frac{3}{4t}\sqrt{(1-\pi^2)}.360°$.

Positis hisce omnibus demonstravit Newtonus, ut etiam in subsequenti problemate præstabimus, perturbatrices vires a Sole in exteriorem terram exercitas, esse ad vires, quæ in eamdem materiam agerent, si tota in annulum illum solidum facesseret, ut 2:5. Unde cum motus omnis nodorum imminui debeat in eadem ratione virium perturbatricium, esset $\frac{3}{10t}\sqrt{(1-\pi^2)}.360°$ motus annuus nodorum, sive annua æquinoctiorum præcessio, quæ ob vires Solis in exteriorem terram exercitas gigni posset: & si inclinatio eclipticæ, & æquatoris assumatur $23° 28\frac{1}{3}'$, & sit $\sqrt{(1-\pi^2)} = 0.91725$, ac fiat $t = 365\frac{1}{4}$, esset motus omnis hujusmodi $9'' 76\frac{2}{5}''$. At cum a terra exteriori ad sphæram inscriptam motus transire debeat, & tanto minor in terra eadem superesse, ut investigaret Newtonus quanam ratione distributio omnis fieret, alterius hypotheseos loco assumpsit quantitatem absolutam motus sic conservari, ut qui exterioris terræ antea erat, communicatione facta, totus supersit in tota terra. Deinde ostendit quantitatem motus sphæræ esse ad quantitatem motus annuli alicujus positi circa æquatorem, & circa aliquam æquatoris diametrum simul cum sphæra revoluti, ut quantitas materiæ in sphæra ad quantitatem materiæ in annulo, & tria quadrata ex quarta peripheriæ parte ad duo quadrata ex diametro conjunctim.

Et quidem ratio quantitatis motus, & quantitatis etiam momenti in ſphæra, & annulo facile admodum definiri poteſt. Nam ſi in fig. 12. ſtatuamus circulum radii LG circa axem TB revolvi, velocitas in particulis ſingulis proportionalis erit diſtantiæ ab axe ipſo, eritque in elemento M*m* motus quantitas PM. M*m* = LG. P*p*, atque in toto circulo erit $4\,LG^2$, auctaque in annulo quantitate materiæ in ratione N : 1 motus quantitas in eadem ratione augebitur. Quantitas autem momenti, quæ ex maſſa, velocitate rotantium particularum, & diſtantia ab axe motus æſtimatur, in elemento M*m* erit $PM^2 . Mm = LG . PM . Pp$, &, poſito ut antea radio ad peripheriam ut 1 : *p*, erit in toto annulo $\frac{1}{2} p . LG^3 . N$. Erit etiam $p . PM . LG . Pp$ motus quantitas in circulari zona, quæ revolutione elementi arcus M*m* circa axem TB gignitur, & quantitas motus in ſuperficie ſphærica radio LG deſcripta erit $\frac{1}{4} p^2 . LG^3$, atque in tota radii ejuſdem ſphæra erit $\frac{1}{16} p^2 . LG^4$. Quare cum quantitas materiæ in ſphæra ſit $\frac{2}{3} p . LG^3$, atque in annulo $p . LG . N$, erit ratio quantitatum motus in ſphæra, & annulo $\frac{2}{3} p . LG^3 . \frac{3}{16} p^2 : 8 p . LG . N$. Quantitas momenti in ſphæra radio LG deſcripta cum juxta Probl. III. Lib. I. ſit $\frac{4}{15} p . LG^5$ erit ratio quantitatum totius momenti in ſphæra, & annulo circa æquatorem poſito $\frac{2}{3} p . LG^3 : p . LG . N . \frac{5}{4}$, ſive in ratione quadrupli materiæ in ſphæra ad quintuplum materiæ in annulo.

Cum radius circuli ad peripheriam ſe habeat ut 50000 : 314159, erit ratio tripli quadrati ex quadrante circuli ad duplum quadratum ex diametro, ſive $\frac{3}{16} p^2 : 8 = 925274 : 1000000$. Et ſi in terra ſphæroidica ſemiaxis minor, qui per polos tranſit, vocetur C, & ſit A æquatoris radius, ac fiat A : C = 231 : 230, in hypotheſi homogeneitatis erit quantitas materiæ totius terreſtris ad quantitatem materiæ in ſphæra inſcripta ut $A^2 : C^2$, & quantitas materiæ in ſphæra ipſa erit ad quantitatem materiæ exterius redundantis ut $C^2 : A^2 - C^2 = 52900 : 461$. Compoſitis igitur rationibus erit quantitas motus ſphæræ ad quantitatem motus an-

annuli ut 106 . 17 : 1 , & summa quantitatum motus annuli , & sphæræ erit ad quantitatum motus solius annuli ut 107 . 17 : 1 : & si quantitas motus totius Terræ eadem esse debeat , quæ in terra exterius ad modum annuli redundantis ob vires perturbatrices Solis gigneretur , $976 \frac{2}{5}''$ minuendo in ratione 1 : 107 . 17 , fieret $9'' \; 7'''$ circiter annuus motus nodorum eclipticæ , & æquatoris , sive annua æquinoctiorum præcessio vi Solis genita . Newtonus elementis calculi paululum variatis motum hujusmodi ex Sole ortum constituit $9'' \; 7''' \; 20^{IV}$, & reliquum $40'' \; 52''' \; 53^{IV}$ Lunæ actioni tribuit ut simul conjunctis viribus motus annuus præcessionis $50 \frac{1}{3}''$ circiter haberi posset : atque inde eamdem eruit proportionem virium Solis , & Lunæ 1 : 4 . 4815 , quam ex phænomenis marini æstus antea collegerat .

At vero in corporibus simul rotantibus , aut oscillantibus non eadem quidem quantitas motus , ut in corporibus libere impulsis , sed eadem momenti quantitas conservari debet , quemadmodum in Theor. V. Lib. I. , atque in scholio subsequenti demonstratum est . Quare cum quantitates momentorum in sphæra , & annulo , assumptis iisdem numeris qui antea , esse debeant ut 91 . 8 : 1 , motum omnem $976 \frac{2}{5}''$ minuendo in ratione 1 : 92 . 8 fieret $10'' \; 27'''$ annuæ præcessionis motus , qui ex Solis viribus in Terra omni oriri posset . Hæc fere eadem ratio est , qua motum undique distribui , & ab annulo ad terram omnem transire oportere ostenderat D. Alembert §. 143. de præcessione æquinoctiorum . Quod si igitur accurate verum esset principium , quod ipse quidem author clarissimus §. 141. demonstratione indigere existimaverat , & quod tamen §. 130. ex generali , ac directa solutione problematis sibi visus erat collegisse , scilicet si motus medius nodorum idem esset in lunulis , aut singillatim diurno motu circa æquatorem revolutis , aut simul junctis ad modum annuli æquatorem ipsum circumambientis , ut etiam Eques Clarissimus d'Arcy in Actis Parisiensis Academiæ anni 1759 assumpserat ; annua æquinoctiorum præcessio vi Solis genita in hypothesi homogeneitatis Terræ , & posita differentia semiaxium $\frac{1}{231}$ vere esset $10'' \; 27'''$. Eodem enim principio assumpto diurni motus jam satis habetur ratio , & qui subinde instituitur calculus non tantum elegans , & ingeniosus est , verum etiam accuratus .

In opere Cosmographico minime prætereundum erat quo ingenio solutionem problematis difficillimi tentaverit Newtonus , nec quo alio tramite authores alii celeberrimi ad solutionem veram ac-

 ces-

cesserint, aut pervenerint. In Transactionibus Philosophicis solutiones binæ prodierunt, quæ in eosdem fere numeros Newtoni recidunt: altera a D. Sylvabelle anno 1754, altera biennio post a D. Walmesley exhibita. Et quidem Walmeslejus binas Newtoni hypotheses retinuit: & quod in terra omni eadem manere debeat motus quantitas, quæ in sola exteriori terra a viribus perturbatricibus gigneretur: & quod motus nodorum annuli æquatorem circumambientis idem esse debeat qui in Luna eodem periodico tempore in æquatore ipso revoluta, scilicet $\frac{3}{4t}\sqrt{(1-\pi^2)}\cdot 360^\circ$. Animadvertit vero in Lem. III. non eodem modo eamdem quantitatem motus per terram omnem distribui si terra exterior ad solidum æquatoris annulum reducatur, ut Newtonus jam intellexerat, ac si maneat in locis suis: atque idcirco Terram sphæroidicam considerando, & posito æquatoris radio A, & differentia semiaxium B, invenit ipse quantitatem motus totius sphæroidis ad differentiam quantitatum motus sphæroidis, & sphæræ inscriptæ se habere circiter 2 A : 5 B. Quare motum ipsum $\frac{3}{4t}\sqrt{(1-\pi^2)}\cdot 360^\circ$ minuendo primum in ratione 2 : 5, quæ est ratio virium agentium in exteriori terra prout manere omnis in locis suis, aut ad solidum æquatoris annulum reduci intelligitur, ac deinde ob motus communicationem minuendo rursus in ratione 5 B : 2 A, motum præcessionis annuum in priori problemate constituit $\frac{3}{4t}\cdot\frac{B}{A}\cdot\sqrt{(1-\pi^2)}\cdot 360^\circ$. In problematis aliis subsequentibus eamdem methodum ad æquationes præcessionis mediæ, & nutationem terrestris axis determinandam traduxit Walmeslejus, & elegantia theoremata exhibuit, quæ leges præcessionis, & nutationis axis definiunt: & in altera dissertationis ejusdem parte motum nodorum terrestris orbitæ, & variationem obliquitatis eclipticæ ex Planetarum aliorum actione ortam singulari pariter elegantia supputavit.

In dissertatione de motu diurno Terræ, quæ eodem anno 1756 a Regia Berolinensi Academia præmium obtinuit, & in qua hypotheses, & methodum Newtoni ad præcessionis æque, ac nutationis phænomena traducere primum cœperam, idem theorema quantitatis motus sphæroidis Cap. VII. exhibui. Illud etiam ex jam dictis facile admodum potest colligi. Qua enim ratione in Probl. III. Lib. I. patuit quantitatem momenti circulorum in eodem plano circa centrum se se volventium esse in ratione quadruplicata radiorum, patebit etiam

etiam quantitatem motus esse in ratione radiorum triplicata. Pariter ductis quocumque planis ad diametrum aliquam æquatoris sphæroidis normalibus, ut in corollario tertio problematis ejusdem, manifestum erit quantitatem motus in singulis sphæroidis sectionibus eamdem assumi posse, quæ in circulis ejusdem areæ, seu quorum radii ad radios circulorum in sphæra circumscripta similiter sectorum se habeant ut $\sqrt{A.C} : A$. Itaque quantitates motus in singulis sectionibus sphæroidis, & sphæræ circumscriptæ, & in tota etiam sphæroide, & sphæra circa eamdem diametrum revoluta inter se erunt ut $A^{\frac{3}{2}} . C^{\frac{1}{2}} : A^3$, sive ut $C^{\frac{1}{2}} : A^{\frac{3}{2}}$. Et cum quantitates motus in sphæra circumscripta, & inscripta esse debeant ut $A^4 : C^4$, erit quantitas motus sphæroidis ad quantitatem motus inscriptæ sphæræ ut $A^{\frac{5}{2}} : C^{\frac{5}{2}}$ & quantitas motus sphæroidis erit ad differentiam motuum sphæroidis & sphæræ ut $A^{\frac{5}{2}} : A^{\frac{5}{2}} - C^{\frac{5}{2}}$, seu proxime ut $A : \frac{5}{2} B$. Juxta idem Coroll. III. Probl. III. Lib. I. quantitates momentorum in sphæroide, & sphæra circumscripta esse debent ut $C^2 : A^2$: in sphæra circumscripta, & inscripta ut $A^5 : C^5$: in sphæroide, & sphæra inscripta ut $A^3 : C^3$: adeoque momenti quantitas in sphæroide ad differentiam quantitatis momentorum sphæroidis, & sphæræ inscriptæ se habebit proxime ut $A : 3 B$.

Silvabellius in dissertatione, quam ab anno usque 1752 Societati Londinensi obtulerat, & quæ anno 1756 prodiit in Transactionibus Philosophicis, quæque tertiam partem constituit totius tractatus de variationibus Planetarum editi eodem anno in collectionibus Massiliensibus, censuit quidem æqualem esse motum nodorum annuli, & motum mediocrem nodorum Lunæ in plano æquatoris æquali tempore revolutæ, ut legitur Cap. IV. Par. III. dissertationis Massiliensis; eam vero hypothesim ad solutionem problematis minime adhibuit. Primo enim cum vires perturbatrices, & quantitatem momentorum in Terra sphæroidica supputasset, eadem fere ratione, qua in Probl. III. Lib. I. usi sumus, definivit velocitatem, qua ob vires ipsas circa aliquam æquatoris diametrum Terra omnis deberet inclinari. Subinde vero hujusmodi velocitatem cum velocitate diurni motus ita componi censuit, ut, si in fig. 32. velocitates binæ sint Ac, & Ar, particula æquatoris A moveatur per Am, & totum æquatoris planum $NAna$ abeat in locum $N'An'$, & plano eclipticæ NCn post datum tempus occurrat in N', & n': quo modo

modo Lunæ ex A in r projectæ orbita ob vires perturbatrices Solis circa vectorem radium AT nutaret ut in Probl. I. Lib. III. Par. I. explicatum est. Denique analyticas formulas diversa ratione ad numeros deduxit author clarissimus. Etenim in dissertatione Londinensi Sect. IV. §. XXVI. vim centripetam æqualem statuit quadrato velocitatis per diametrum circuli diviso, & positis prioribus denominationibus præcessionem annuam ex Solis actione ortam invenit $\frac{3}{4r} \cdot \frac{B}{A} \cdot \sqrt{(1 - \pi^2)} \cdot 360^\circ$. In Massiliensi vero dissertatione cum §. 33. & 150. vim centripetam, ac centrifugam in circulari orbita æqualem statuisset quadrato velocitatis per radium diviso, eamdem præcessionis annuæ quantitatem $\frac{3}{4r} \cdot \frac{B}{A} \cdot \sqrt{(1 - \pi^2)} \cdot 360^\circ$, in ea tantum hypothesi obtinuit §. 101., & 178, quod terra exterior media sui parte sit fluida, & Solis vires ad directionem diurni motus variandam duplo minores sint, quam quæ in massam undique solidam exercerentur.

Et cum jam de elementari principio sermo exciderit, quod ambigua scriptorum locutione tot jam erroribus, ac controversiis a Grandii, & Varignonii temporibus ad hæc usque occasionem præbuit, reassumenda sunt elementa alia, quæ §. III. & IV. Introd. prioris Partis attigimus. Scilicet si in motu accelerato velocitas V finitum valorem habeat, minimo quocumque tempore dT veluti constans censeri poterit per totum elementum spatii crescentis dS, eritque $V = \frac{dS}{dT}$, ac si vis omnis acceleratrix vocetur G, & elementum temporis sumatur constans erit $G.dT = \frac{ddS}{dT}$: qua etiam formula in Probl. II. Lib. IV., & tota theoria Lunari jam usi sumus. Quod si autem velocitas omnis V, & spatium S a motus initio supputetur, in motu uniformiter accelerato velocitas ea erit, qua uniformiter continuata eodem tempore absolvi poterit duplum spatium, atque ita fiet $G.T = V$, $G.2S = V^2 = G^2.T^2$, & dato tempore T^2 erit vis G ut 2S. Idcirco in Theor. II. & IV. Lib. I., in Coroll. II. Probl. II. Lib. II. prioris partis, aliisque in locis passim vires centripetas æstimavimus ex velocitate, quam generant dato tempore, sive ex duplo spatio percurso, & vim centrifugam, aut centripetam in circulari orbita æqualem statuimus quadrato arcus dato tempore percursi, non per diametrum, sed dumtaxat per radium divisi.

Et

Et quidem si plures vires continue agentes comparentur inter se invicem, perinde erit aut bis, aut semel accepti spatii rationem assumere, dummodo eadem semper assumatur ratio. Ideo Simpsonius cum in secundo Lemmate de præcessione æquinoctiorum vim centripetam corporum terrestrium sub æquatore ex simplici sinu verso dati arcus æstimasset, sive ex quadrato arcus per diametrum diviso, & cum pariter spatium, quod dato tempore perpendiculariter ad planum æquatoris ob vires perturbatrices absolvi posset, æstimasset ex ipsis viribus perturbatricibus, justam proportionem virium, eamdemque præcessionis annuæ quantitatem exhibuit, quam Alembertius §. 46., & 140. de Præcessione supputaverat vim centripetam æstimando ex duplo sinu verso, sive ex quadrato arcus diviso per solum radium. Eadem etiam ratione Eulerus in Actis Berolinensibus anni 1749 eamdem præcessionis quantitatem obtinuit cum in Probl. III. §. 26. tangentem deviationis terrestris axis duplo minorem, & §. 31. vim centripetam pariter duplo minorem statuisset, quam in calculis subsequentibus assumemus. Ubi vero aut singillatim consideranda esset vis aliqua continue agens, aut comparanda tantum cum alia vi, quæ semel alicui corpori impressa datam velocitatem produxerit, ut si vis projectionis, & vis centripeta terrestrium corporum comparari deberent inter se invicem; tunc vires ipsæ æstimandæ erunt ex totis velocitatibus, quas generant dato tempore, vis projectionis ex spatio simplici, vis centripeta ex duplo spatio, quod eodem tempore velocitati genitæ responderet. Idcirco in binis Sylvabellii dissertationibus cum recte jam determinata esset velocitas rotationis, quæ ob vires perturbatrices circa aliquam æquatoris diametrum gigni posset, & cum velocitas motus diurni, & annui quantitate alia exprimenda esset, quæ expressionem vis centripetæ involveret, sinus versus non semel, sed bis debebat accipi, & quadratum arcus non per diametrum, sed tantum per radium dividi.

Huc redeunt, quæ alii Mechanicæ Scriptores ex curvæ aut absolutæ, aut poligonæ minus propria fortasse consideratione jam antea eruerant. Ut vero ad præcessionem æquinoctiorum, & nutationem terrestris axis redeamus, accuratam, ac generalem solutionem problematis exhibuerunt Alembertus in præclaro opere, quod anno 1749 prodiit, Eulerus in memorata dissertatione, quæ eodem anno Actis Berolinensibus inserta legitur, & D. la Grange in dissertatione de libratione Lunæ, quæ anno 1769 a Parisiensi Academia præmium obtinuit. Authores hi celeberrimi ex generalibus

libus motus principiis ingeniosa analysi eruerunt circa quem axem, spectatis Solis, & Lunæ viribus, diurna Terræ rotatio absolvi debeat, & datis axis deviationibus variationes omnes intersectionis, inclinationisque eclipticæ, & æquatoris determinarunt. Licet autem earumdem variationum quantitates cum Sylvabellii formulis videantur convenire, & cum iis etiam quas Simpsonius in Miscellaneis exhibuit, & quas D. la Lande in utraque Astronomiæ suæ editione secutus est, in hoc tamen potissimum methodi omnes hujusmodi inter se differunt quod Newtonus, Sylvabellius, Walmeslejus, Simpsonius intellexerint particulam æquatoris A, fig. 32., diurno motu ex A in *r*, & Solis, aut Lunæ actione ex A in *c* latam, compositis motibus sic ferri in directione A*m* ut æquator NA*n* circa radium AT nutando in locum N' A*n*' transeat: Alembertus vero, Eulerus, & Grangius ostenderint compositis simul viribus, ac motibus novum rotationis axem exsurgere, & æquatorem novum N' A*n*' a priore NA*n* ita diversum esse ut aliam Terræ sectionem referat.

Ego in Berolinensi dissertatione jam memorata cum hypothesim motus nodorum, cujus defectum nemo adhuc attigerat, & Newtonianam methodum ad variationes omnes diurni motus supputandas adhibuissem, in altera dissertationis ejusdem editione demonstratis binis theorematis compositionis motuum rotationis, conservationisque summæ omnium momentorum, novam, & facilem, accuratamque solutionem problematis exhibui, quæ cum trium eorumdem Mathematicorum principiis, & numeris omnino convenit. In libro etiam de gravitate universali corporum ad solidum æquatoris annulum translatis formulis compositionis motuum rotationis ostendi motum nodorum annuli non jam æqualem, sed duplum esse motus mediocris nodorum Lunæ in ipso æquatoris plano diebus singulis revolutæ: quo posito Newtoniana methodus ad eosdem jam indicatos numeros reduceretur. Modo cum totam supputationum seriem adhuc ad simpliciorem formam reduxerim, atque in primis ex ipsa diurni motus, & perturbatricium virium ratione brevissime collegerim axem totius compositæ rotationis Terræ ab axe figuræ sensibiliter non recedere, quod calculorum omnium hujusmodi fundamentale theorema est, traditis jam in priori libro aliis theorematis pulcherrimam Physicæ cælestis partem reassumere, & integro hoc libro adornare volui.

CA-

CAPUT PRIMUM.

DE AXE DIURNÆ ROTATIONIS.

PROBLEMA I.

SI particulæ omnes ſphæroidis ſolidæ PBpb, fig. 33., circa polos P, p compreſſæ, & accedentis proxime ad ſphæram attrahantur a corpore alio ſatis diſſito in productione rectæ ST poſito, atque idcirco impellantur viribus proportionalibus diſtantiæ a plano Qq, quod tranſit per centrum T, & eſt rectæ ST perpendiculare; inveuire momentum inde ortum ad ſphæroidem omnem rotandam circa centrum T.

Sit IK ſectio quælibet axi Pp perpendicularis, atque in ipſa accipiantur duæ quælibet particulæ L, l, ut ſit LX $=$ lX, & inde in planum Qq demittantur perpendicula LM, lm. Sit inſuper P vis omnis attractrix longinqui corporis in illa a plano diſtantia, quæ exprimatur unitate: & cum juxta poſteriorem formulam Coroll. I. Probl. I. Lib. II. prioris Partis vis attractrix ad quamcumque aliam a plano diſtantiam eſſe debeat diſtantiæ LM proportionalis; ſint P. LM. MT, & P. lm. mT momenta duarum particularum L, l ad ſphæroidem omnem in contrarias partes volvendam circa centrum T. Agatur per punctum X recta NXn plano Qq parallela, & in planum idem demittatur perpendiculum XY. Erit LM. MT $=$ LN. MT $+$ MN. MT, & lm. mT $=$ ln. mT $-$ mn. mT: & momentum duarum particularum ad ſphæroidem omnem rotandam erit

$$\text{P.LN.}m\text{M} - \text{P.MN.}\overline{\text{MT}+m\text{T}} = 2\,\text{P.LN.XN} - 2\,\text{P.XY.YT}.$$

Sint jam m ſinus, & n coſinus anguli pTq, ſive anguli STB, quem recta ST cum æquatore ſphæroidis Bb efficit. Erit XY $= m$: TX, TY $= n$TX, XN $= m$. LX, LN $= n$. LX, & fiet momentum idem

$= 2\,mn.\,\text{P}.\,\overline{\text{LX}^2 - \text{TX}^2}$. His poſitis ſi ſit I$i$ latitudo annuli, quo ſectio ſphæroidis IK ſectionem ik ſphæræ inſcriptæ ſuperat, & ſphæroïs ad ſphæram ipſam proxime accedat, ita ut momentum particularum omnium I, i proxime idem cenſeri poſſit; elementum momenti circularis annuli habebitur momentum ſingularum parti-

cularum per earumdem numerum multiplicando, sive multiplicando $2\,mn\mathrm{P}.\,\mathrm{I}i.\,\overline{\mathrm{LX}^2-\mathrm{TX}^2}$ per elementum circularis peripheriæ. Est vero summa quadratorum omnium LX^2 ex sinubus rectis in integro semicirculo confectorum $=\frac{1}{4}p.\,\mathrm{X}i^2$, & summa totidem TX^2, sive productum quadrati TX^2 in semiperipheriam circuli est $=\frac{1}{2}p.\,\mathrm{X}i.\,\mathrm{TX}^2$. Erit igitur momentum particularum omnium L, l per totum circularem annulum extra sphæram sphæroidi inscriptam dispositarum $=2\,mn\mathrm{P}.\,\mathrm{I}i.\,\mathrm{X}i.\,p(\frac{1}{4}\mathrm{X}i^2-\frac{1}{2}\mathrm{TX}^2)$, & si sit ut antea $\mathrm{TA}=\mathrm{C}$, $\mathrm{BA}=\mathrm{B}$, $\mathrm{TX}=\mathrm{X}$, $\mathrm{I}i=\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}}.\,\mathrm{X}i$, &

$\mathrm{X}i^2=\mathrm{C}^2-\mathrm{X}^2$, evadet momentum annuli $=mn\mathrm{P}.\,\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}}.\,p$

$$(\mathrm{C}^2-\mathrm{X}^2)(\tfrac{1}{2}\mathrm{C}^2-\tfrac{3}{2}\mathrm{X}^2)=mn\mathrm{P}.\,\frac{\mathrm{B}}{2\,\mathrm{C}}.\,p(\mathrm{C}^4-4\,\mathrm{C}^2\mathrm{X}^2+3\,\mathrm{X}^4),$$

& momentum hemisphæroidis $=mn\mathrm{P}.\,\frac{\mathrm{B}}{2\,\mathrm{C}}.\,p(\mathrm{C}^5-\frac{4}{3}\mathrm{C}^5+\frac{3}{5}\mathrm{C}^5)$,

ac sphæroidis totius momentum $=\frac{4}{15}\,mn\mathrm{P}p\mathrm{B}.\,\mathrm{C}^4$.

Corollarium I.

Quia sphæroidis oblatæ, & sphæræ inscriptæ soliditates sunt inter se ut $\mathrm{BT}^3:\mathrm{AT}^3$, & soliditas sphæræ est $\frac{2}{3}p\mathrm{C}^3$; erit $\frac{2}{3}p\mathrm{C}^3.\,\frac{\mathrm{BT}^3-\mathrm{AT}^3}{\mathrm{AT}^3}$, seu $\frac{4}{3}p\mathrm{B}.\,\mathrm{C}^2$ materia omnis, qua sphærois sphæram inscriptam superat, & momentum particularum totidem sitarum in loco B erit $=\frac{4}{3}p\mathrm{B}.\mathrm{C}^2.\,\mathrm{P}.\,\mathrm{BZ}.\,\mathrm{ZT}=\frac{4}{3}\,mn\mathrm{P}p\mathrm{B}.\mathrm{C}^4$, quintuplo scilicet majus erit quam momentum earumdem particularum in locis suis circa sphæram sphæroidi inscriptam dispositarum.

Corollarium II.

Et quia summa omnium $\mathrm{BZ}.\,\mathrm{ZT}$, sive $mn.\,\mathrm{BZ}^2$ per totum æquatoris Bb circuitum dimidia est quantitatum totidem maximarum; erit $\frac{2}{3}\,mn\mathrm{P}p\mathrm{B}.\,\mathrm{C}^4$ momentum particularum earumdem omnium per totum æquatoris Bb circuitum ad modum annuli uniformiter dispositarum, atque ad momentum particularum in locis suis intra sphæræ, & sphæroidis superficies jacentium se habebit ut $2:5$, quemadmodum libri hujus initio assumptum fuerat.

PRO-

PROBLEMA II.

Si proponatur sphærois revolutione ellipseos $BPbp$ non circa minorem axem Pp, sed circa majorem Bb genita, & reliqua omnia maneant ut supra; invenire momentum omnium particularum.

Sit $IHKb$, fig. 34., sectio elliptica axi Pp perpendicularis in loco X, & sit ellipseos semiaxis major EO, minor RO, qui cum recta Dd, & plano Qq efficiat angulum ROD, ac sit insuper differentia semiaxium $Ee = b$, adeoque $HL = \frac{b.LF^2}{RO^2}$.

Tum vero si recta Ll rectam Dd intersecet in puncto C, & producatur LO in V, vires æqualium particularum in l, & V positarum ad sphæroidem omnem rotandam æquales erunt vi particulæ ejusdem L. Quare cum etiam numerus particularum in HL, Vh idem sit, momentum earumdem particularum, sive elementum momenti annuli elliptici, quo sectio sphæroidis sectionem sphæræ inscriptæ superat, æquale erit quantitati

$\frac{2mnP.b.LF^2.\overline{LC^2 - TX^2}}{RO^2}$ ductæ in elementum peripheriæ circularis: & cum sit $LF = \frac{LC.Oc - CO.Dc}{RO}$, neglectoque ambiguo termino $\frac{2LC.Oc.CO.Dc}{RO^2}$, qui in duobus quadrantibus DiO, diO contrario signo destruitur, sit $LF^2 = \frac{LC^2.Oc^2 + CO^2.Dc^2}{RO^2}$, elementum ipsius momenti æquabitur elemento peripheriæ circularis ducto in $2mnP.b.\frac{\overline{LC^2.Oc^2 + CO^2.Dc^2}.\overline{LC^2 - TX^2}}{RO^4}$. Est autem summa omnium LC^4 per totam semiperipheriam $= \frac{3}{16}p.RO^4$, summa omnium $CO^2.LC^2 = \frac{1}{16}p.RO^4$, & summa omnium $LC^2.TX^2$, aut $CO^2.TX^2$ est $= \frac{1}{4}p.RO^2.TX^2$. Quare si sinus anguli DOR sit $= t$, cosinus $= T$, erit momentum totius annuli elliptici

ptici $= mnP.b.p(\frac{3}{8}RO^2.T^2+\frac{1}{8}RO^2.t^2-\frac{1}{2}RO.TX^2) =$ $mnPbp(\frac{1}{4}RO^2.T^2+\frac{1}{8}RO^2-\frac{1}{2}RO.TX^2)$, & si differentia semiaxium totius sphæroidis sit $= B$, ac sit propterea $b = \frac{B}{C}.RO = \frac{B}{C}.Xi$, fig. 33., erit momentum particularum omnium in oblongæ sphæroidis sectione IK extra sphæram inscriptam redundantium $= mnP.\frac{B}{C}.p(\frac{1}{4}\overline{C^2-X^2}^2.T^2 +$ $\frac{1}{8}\overline{C^2-X^2}^2-\frac{1}{2}C^2X^2+\frac{1}{2}X^4)$, ac de more accipiendo summam momentorum omnium hujusmodi, ac scribendo semiaxem C loco X, fiet momentum hemisphæroidis $= mnP.\frac{B}{C}.\frac{2}{15}pC^5T^2$, & sphæroidis totius momentum $= \frac{4}{15}mnPpB.C^4.T^2$.

Corollarium I.

Si fiat $T=1$, & rectæ Rr, Dd, fig. 34., simul congruant, & planum Qq, fig. 33., sit plano axium perpendiculare, momentum sphæroidis oblongæ semiaxibus $C+B$, & C descriptæ erit $= \frac{4}{15}mnPpB.C^4$, scilicet per antecedentem propositionem æquale erit momento oblatæ alterius sphæroidis, quæ describatur iisdem semiaxibus. Quod si alii, atque alii fiant planorum duorum anguli, & cosinus T valores omnes obtineat, ac pro T^2 accipiatur valor ipsius medius $\frac{1}{2}$; momentum medium sphæroidis oblongæ momenti oblatæ alterius sphæroidis dimidium erit.

Corollarium II.

Si oblata simul, & oblonga sit sphærois, scilicet si meridianum simul, & æquatorem, sectionemque alteram per polos factam, & meridiani plano normalem habeat ellipticam, & sit sphæroidis semiaxis minor $= C$, major $= C+B+D$, & tertius duobus prioribus normalis $= C+B$, & sphærois accedat proxime ad sphæram, erit momentum omne $= mnP.\overline{B+D.T^2}.\frac{4}{15}pC^4$. Ductis

enim

enim planis quibuslibet minori axi perpendicularibus, extra circulum in ſphæra inſcripta ſectum, circularis, & ellipticus annulus ſupererunt, quorum momenta, ob ſphæræ, & ſphæroidis totius affinitatem, eodem modo ſupputari poterunt, ac ſingillatim in oblata, atque oblonga ſphæroide ſupputarentur.

PROBLEMA III.

Si Terra diurno motu circa axem ſuum revolvatur, & Solis actione inclinetur circa diametrum aliquam æquatoris, invenire axem totius compoſitæ rotationis.

Sit NAn, fig. 32., planum terreſtris æquatoris, NCn planum eclipticæ, Nn duorum planorum interſectio, SAT planum circuli declinationis Solis, Zz interſectio æquatoris, & plani alterius, cui perpendiculariter inſiſtat recta ST a Sole ducta ad centrum telluris T. Si maſſa Solis vocetur M, major ſemiaxis Terræ A, minor C, differentia utriuſque B, & ſint m, n ſinus, & coſinus declinationis Solis ab æquatore, ſive inclinationis axis diurni motus ad planum Zz; erit $\frac{3M}{ST^3}$ vis omnis acceleratrix, qua particula quævis Terræ a plano Zz diſtrahetur in ea diſtantia, quæ exprimitur unitate, & juxta Probl. I. erit $\frac{4}{15} mn.pB.C^4.\frac{3M}{ST^3}$ momentum virium acceleratricium, quibus Terra inclinabitur a Sole circa aliquam æquatoris diametrum Zz. Et quia vis acceleratrix ducta in elementum temporis æquatur velocitati genitæ eodem tempore, ſi periodicum tempus Terræ circa Solem vocetur t, erit $\frac{4}{5} mn.pB.C^4.\frac{Mdt}{ST^3}$ momentum velocitatis rotationis circa diametrum ipſam conceptæ. Inſuper ſi velocitas hujuſmodi rotationis in maxima æquatoris diſtantia a diametro Zz vocetur v, juxta Coroll. III. Probl. III. Lib. I. erit momentum totius rotationis $\frac{4}{15} pA^2.C^2.v$: quod cum juxta Theor. V. ejuſdem libri æquari debeat priori momento, fiet $v = \frac{3M}{ST^3}.mn.B.\frac{C^2.dt}{A^2}$. Denique ſi ſit ds angulus ATr, quem punctum æquatoris A circa centrum T, & circa axem diurni motus abſolvit elemento temporis dt,

adeo-

adeoque fit $A.dt$ ſpatium Ar, & $\frac{A.dt}{dt}$ velocitas diurni motus; juxta Theor. IV. citati libri compoſitis rotationibus Terra omnis neque circa axem figuræ, & diurni motus, neque circa diametrum Zz volvetur, ſed circa axem tertium, qui jaceat in plano per diametrum Zz, & figuræ axem traducto, atque ab axe figuræ declinet angulo, cujus tangens ſit $\frac{3M.mn}{ST^3}.\frac{B.C^2.dt^2}{A^2.dt}$.

COROLLARIUM I.

Quia rotationis cujuſque axis, & æquator ſunt ſemper ad rectos angulos, & æqualibus ſemper angulis bini æquatores, & bini axes duarum rotationum a ſe invicem recedunt, ſi fiat $Ar : Ac$ ut diurni motus volocitas Adt ad velocitatem $\frac{3M.mn.B.C^2.dt}{ST^3 \cdot A^2}$, aut proxime $\frac{3M.mn.B.dt}{ST^3}$ alterius rotationis, quæ ob vires Solis circa diametrum Zz a puncto A in plano circuli declinationis ſingillatim conciperetur, compleaturque rectangulum $Armc$, & per puncta A, T, m traducatur planum N^1Amn^1, erit idem planum æquator novæ rotationis ex binis prioribus compoſitæ.

COROLLARIUM II.

Erunt etiam N^1, n^1 interſectiones novi æquatoris cum plano eclipticæ poſt elementum temporis dt, & puncta m, N^1 jacebunt in adverſas partes prioris æquatoris NAn, & cum motus diurnus Terræ, & motus annuus apparens Solis fiat ab occidente in orientem juxta ordinem ſignorum, nodi æquatoris N, n, tranſeundo in N^1, n^1 regredientur contrario ordine in plano eclipticæ: quo dato Sol a nodo N digreſſus, citius perveniet ad nodum n^1, & æquinoctium citius habebitur, quam ſi Terra circa figuræ axem ſemper invariabiliter revolveretur: regredientibus autem punctis æquinoctialibus fixarum longitudo, quæ ſupputatur a prima elipticæ, & æquatoris interſectione, ſemper augebitur.

COROLLARIUM III.

Id ergo minime fiet quod priſtinus Terræ æquator Arn circa radium AT nutando in locum Acn^1 tranſeat, ut in orbita Lunæ, aut

aut Planetæ alterius ex A in *r* circa centrum T moti, itidemque extraneis viribus abrepti ex A in *c* fieri oporteret; sed quod particulæ N, *r*, *n* extra planum novi æquatoris jaceant: atque ita pariter non quod figuræ, ac rotationis axis angulo $\frac{3\,M}{ST^3} \cdot mn \cdot \frac{B \cdot dt^2}{A^2 \cdot ds}$ inclinetur circa æquatoris diametrum Zζ, sed quod Terra omnis, atque idem axis circa axem novum rotari incipiat, qui angulo $\frac{3\,M}{ST^3} \cdot mn \cdot \frac{B \cdot dt^2}{A^2 \cdot ds}$ a priori distat. Atque ita de novo axe, & æquatore accipienda erunt, quæ de prioris axis, & æquatoris conversione authores alii intellexerant.

Corollarium IV.

Et cum in angulis exiguis tangens, arcus, & sinus rectus æquentur proxime inter se, erit $\frac{3\,M}{ST^3} \cdot mn \cdot \frac{B \cdot dt^2}{A\,ds}$ distantia novi poli a priori polo figuræ, & rotationis, eaque in ipso motus initio exhibebit quantitatem infinite parvam primi ordinis. Quod si fiat radius æquatoris A ad arcum A*r*, sive A.*ds*, ita eadem distantia ad quartam, prodibit arcus quem prior figuræ polus circa novum polum describet elemento temporis *dt*: atque is arcus spectabit ad quantitates infinite parvas ut vocant secundi ordinis. Inde colligi posset in Solis transitu ab uno ad alterum æquinoctium figuræ, & rotationis polos a se invicem sensibiliter non recedere. Præstabit autem idipsum ex prioribus rotationum compositarum theorematis derivare.

Theorema.

Rotationis diurnæ axem, & æquatorem ab axe, & æquatore figuræ sensibiliter non recedere, & medium rotationis axem, & æquatorem semper esse axem, & æquatorem ipsum figuræ.

Sit in fig. 35. ZPζp Terræ totius sectio per æquatoris diametrum Zζ, & figuræ axem P*p* traducta, & compositæ ut antea rotationis axis sit L*l*. Manifestum est continuato motu, & novis Solis actionibus non accedentibus punctum Z in Z', & figuræ axem PT*p* in locum P'T*p*' post horas duodecim ferri oportere. Tum vero si Solem rursus agere intelligamus, & rursus Terram ob novas vires circa obversam diametrum ζ'Z' e plaga Solis inclinari;

nari ; novus hic rotationis motus cum motu circa axem L*l* concepto sic componetur ut novus axis jaceat in plano LTz', & æquali angulo LTP retrahatur similiter a loco LT ad plagam puncti z diurna semirevolutione delati ad locum z. Ita vero compositæ rotationis axis in ipsum axem figuræ ut antea recidet. Pariter dato Solis loco S, fig. 32., cum diametri A*a* vertex superior A obvertetur Soli, ac simul impelletur in *r*, & *c*, tum quidem figuræ æquator NA*n* vero æquatore compositæ rotationis dexterior fiet ex parte A*n*, & ex parte AN sinisterior. At continuato motu, cum vertex *a* obvertetur Soli, & nodus *n*' transibit in locum N', habebitque adhuc ad dexteram punctum *n*, composita rursus rotatione nodus ipse adhuc regredi, atque ibidem in dexteriorem partem ut antea ferri non poterit nisi novus æquator cum æquatore figuræ congruat. Cum itaque abductiones singulæ axis, æquatorisque singulis elementis temporis sint infinite parvæ, & post semirevolutionem unam fiant in adversas partes, ac se invicem compensent; manifestum est axem, & æquatorem figuræ simul, rotationisque in Terra eumdem permanere.

Corollarium I.

At vero quicumque sit diametri A*a* vertex A, vel *a*, qui Soli S obvertatur, dum semiaxis rotationis a plano per rectam ST traducto, & ad Eclipticæ planum NC*n* perpendiculari recedit ex plaga puncti *m*, ad quam tendit diurni motus directio, semper novæ rotationis æquator *m*N' supra priorem æquatorem *r*N ex plaga nodi N elevabitur, & nodus ipse N in N' abibit: unde cum axis aberrationes compensent se se invicem, ac destruant, & rotationis polus a figuræ polo abducatur, reducaturque alternis vicibus, regressiones punctorum æquinoctialium fient semper ad eamdem partem contra ordinem signorum in antecedentia signa Eclipticæ.

Corollarium II.

Dato etiam quod figuræ axis in Terra pro ipso rotationis axe semper haberi possit, si per axem figuræ ducatur planum, quod per centrum Solis, aut Lunæ transeat, & secetur Terra omnis in duas hemisphæroides occidentalem, orientalemque, inter se æquales, similes, & similiter respectu Solis, aut Lunæ positas, utraque in adversas partes æque, ac similiter trahetur, & quantum pars Orientalis urgebitur Occidentem versus, tantumdem Occidentalis Orientem versus impelletur. Itaque ex præmisso theoremate

mate consequetur insuper quod cum actione Solis, & Lunæ habeantur aliæ variationes axis terrestris, & æquatoris; diurnus tamen Telluris motus non poterit sensibiliter accelerari, aut retardari.

COROLLARIUM III.

Ex iisdem insuper principiis casus alii omnes analogi facile colligentur. Ut si in sphæroide oblata impresso rotationis motu idem diametri vertex motum attrahentis corporis S sequeretur, aut inde tantum exiguis aberrationibus recederet, nec vertex *a* unquam transiret in locum A; nulli haberentur contrarii axis motus, & polus rotationis a polo figuræ continuatis vicibus recederet: quod idem in sphæroide oblonga contingeret, in qua idem axis majoris vertex sit semper e plaga corporis attrahentis S. Nec ullus jam esset finis aberrationum omnium hujusmodi, nisi major ipse axis dirigatur ad corpus S, & rotationis motus fiat circa illam æquatoris diametrum, quæ perpendicularis est plano semitæ a corpore S circa T descriptæ.

SCHOLION.

In prioribus binis problematis eamdem methodum, qua Newtonus in Lem. II. Propos. XXXIX. Lib. III. pro supputandis viribus, ac momentis a corpore aliquo satis dissito in oblatam sphæroidem exercitis usus fuerat, ad oblatam æque, ac oblongam sphæroidem breviter traduximus, eamdemque momenti formulam pro sphæroide oblonga assecuti sumus, quam tradiderat Alembertus Par. II. §. 360. de mundi systemate. In tertio autem problemate, ac theoremate subsequenti solutionem problematum aliorum omnium præcessionis, nutationisque terrestris axis paravimus. Ostendimus scilicet in Terra diurno motu circa figuræ axem revoluta accedentibus Solis, ac Lunæ viribus novum rotationis axem, & æquatorem novum exsurgere: quantitatem deviationis axis, & æquatoris pro dato quolibet elemento temporis supputavimus: & motuum omnium hujusmodi œconomiam eam esse invenimus, ut cum motus nodorum eclipticæ, & æquatoris fiat semper ad eamdem partem, aberrationes axis ex partibus adversis se se invicem compensent, rotationisque, ac figuræ axis unus, atque idem physice censeri possit. Corollarii etiam loco attigimus quod in memorata Berolinensi dissertatione jam primum erat: quod scilicet cum ex varia motus annui combinatione nec positionem, ac parallelismum axis turbari, nec acce-

lerari, aut retardari diurnum motum ex prioribus mechanicæ principiis consequatur; in hypothesi terræ sphæroidicæ, ob eumdem semper axem figuræ, & rotationis, nulla ab externis caussis induci poterit sensibilis diurni motus variatio. Videbimus inferius internas alias diurni motus accelerandi caussas, ac principia esse posse.

CAPUT SECUNDUM.

DE PRÆCESSIONE ÆQUINOCTIORUM.

PROBLEMA IV.

Positis omnibus, quæ antea, invenire præcessionem æquinoctiorum, quæ a Sole, proposito quovis tempore, proficiscitur.

Ducatur AG ex A, fig. 32., nodorum lineæ Nn perpendicularis, atque insuper ex N in planum novi æquatoris $N'A$ ducatur perpendiculum NN'', ac pariter sit NQ syzigiarum lineæ AB perpendicularis. Erit $NQ : NN'' = AG : NN'' = Ar : mr$, & cum juxta denominationes Probl. III. sit $Ar = A.ds$, & $mr = v.dt = \frac{3M.mn}{ST^3} . \frac{B.C^2.dt^2}{A^2}$, seu proxime $= \frac{3M.mn}{ST^3} . B.dt^2$, erit etiam $NN'' = \frac{3M.mn}{ST^3} . AG . \frac{B.dt^2}{A.ds}$. Insuper si π sit sinus anguli ANC, sive AN'C, quo æquator ad planum eclipticæ inclinatur, ob $NN'' : NN' = \pi : 1$, arcus NN', quo retrocedet nodorum linea, erit $= \frac{3M.mn}{ST^3} . AG . \frac{B.dt^2}{\pi.A.ds}$, & angularis nodorum eorumdem motus evadet $\frac{3M.mn}{ST^3} . AG . \frac{B.dt^2}{\pi.A^2.ds}$. Jam vero juxta elementa Trigonometriæ sphæricæ in triangulo sphærico rectangulo ANC est tangens $\frac{\pi}{\sqrt{(1-\pi^2)}}$ anguli ANC eclipticæ, & æquatoris ad tangentem $\frac{m}{n}$ arcus AC declinationis Solis ab æquatore ut sinus

totus

totus ad finum arcus AN, five ut A:AG, atque infuper in eodem triangulo eft finus anguli ANC ad finum totum ut finus arcus AC ad CH finum arcus CN. Ex priori itaque analogia eruetur $AG = \frac{m.A.\sqrt{(1-\pi^2)}}{\pi.n}$, ex altera vero $m = \frac{\pi.CH}{A}$, atque hifce factis fubftitutionibus erit angularis nodorum eorumdem motus $\frac{3M.\sqrt{(1-\pi^2)}.CH^2.B.dt^2}{ST^3.A^2.ds}$. Denique fi fit dz angulus elemento temporis dt a Sole percurfus circa Terram, t vero integrum tempus, & g velocitas revolutionis annuæ, erit $ds = t.dz$, & $dt = \frac{ST.dz}{g}$: & vim centripetam Terræ in Solem $\frac{M}{ST}$ duplo finu verfo exprimendo, feu duplo quadrato arcus per diametrum divifo, aut quadrato velocitatis divifo per femidiametrum, erit $\frac{M}{ST^2} = \frac{g^2}{ST}$. Factis itaque hifce aliis fubftitutionis erit angularis motus nodorum, five præceffio æquinoctiorum dato elemento temporis vi Solis genita $\frac{3\sqrt{(1-\pi^2)}.CH^2}{A^2.t.dz}.\frac{g^2}{ST^2}.\frac{ST^2.dz^2}{g^2} = \frac{3\sqrt{(1-\pi^2)}.CH^2.B.dz}{A^2.t}$: & quia elementum circularis arcus $A.dz$ æquatur elemento abfciffæ TH ducto in radium A, & per femiordinatam CH divifo; tota præceffio æquinoctiorum, quo tempore a Sole percurretur angulus NTC, æquabitur areæ NHC ductæ in $3\sqrt{(1-\pi^2)}.\frac{B}{A^3.t}$.

Corollarium I.

Iifdem etiam fubftitutionibus cum vis centrifuga in orbe annuo prodeat $\frac{g^2}{ST} = \frac{M}{ST^2}$, eaque ad vim centrifugam diurni motus fub æquatore fe habere debeat ut $\frac{ST}{t^2}:1$, vis perturbatrix Solis in puncto æquatoris A, five $\frac{3M.mn}{ST^3}$, ad vim centrifugam diurni motus fe habebit ut $3mn:t^2$. Pariter in Probl. III. fiet deviatio axis compofitæ rotationis a figuræ axe $\frac{3\pi\sqrt{(1-\pi^2)}.CH^2.B.dz}{A^2.t.AG} = \frac{3n\pi.CH.B.dz}{A^2.t}$. Scilicet fi fit

CH

$CH = 0$, hoc est si Sol reperiatur in punctis æquinoctialibus, puncta eadem, & Terræ axis variationem nullam subibunt. Si Sol extra æquinoctia constituatur in loco C, ipsius actione continua habebitur æquatoris, axis, lineæ nodorum a priori loco aberratio: & quidem dato elemento temporis deviatio axis rotationis erit in ratione simplici, angularis autem nodorum regressio erit in duplicata ratione sinus distantiæ Solis ab æquinoctiis.

Corollarium II.

Si pro CH^2 accipiamus valorem medium $\frac{1}{2}A^2$, motus medius nodorum, quo scilicet uniformiter continuato eadem annui motus summa conficeretur, æqualis erit angulo NTC ducto in $3\sqrt{(1-\pi^2)} \cdot \frac{B}{2tA}$, sive erit motus medius hujusmodi

$3\sqrt{(1-\pi^2)}\frac{Bz}{2tA}$. Dato igitur quocumque tempore differentia

medii, & veri motus præcessionis erit ad motum verum, ut triangulum CTH ad segmentum CNH: ad medium autem præcessionis motum se habebit eadem differentia ut triangulum CTH ad sectorem CTN. In octantibus, cum sit $CH = HT$, differentia omnis evadet maxima, & ad motum totalem medium præcessionis se habebit ut dimidium quadratum radii ad dimidium octantem peripheriæ circularis, sive ut dupla diameter ad peripheriam.

Corollarium III.

Cum inclinatio eclipticæ, & æquatoris sit circiter $23° \, 28\frac{1}{2}'$, adeoque sit $\sqrt{(1-\pi^2)} = 0.91725$ circiter, pro z scribendo $360°$, & $365\frac{1}{4}$ pro t, ac posito $B:A = 1:231$, in hypothesi Terræ totius solidæ, & homogeneæ erit præcessio annua æquinoctiorum ex Sole genita $= 21\frac{1}{4}''$. In eadem hypothesi si fiat $B:A = 1:178$ evadet præcessio annua $27'' \, 25'''$, atque erit dumtaxat $24\frac{1}{3}''$ si sit $B:A = 1:201$. Unde cum tota æquinoctiorum præcessio, quæ ex viribus conjunctis Solis, & Lunæ proficiscitur, sit annis singulis $50.\,3''$; in eadem hypothesi Terræ totius solidæ, & homogeneæ, dempto quod haberetur ob Solis vim, tantumdem fere superesset, quod Lunæ vi posset tribui.

Co-

Corollarium IV.

Si Terra nucleum ſphæricum in centro haberet, ac differentia denſitatis nuclei, & materiæ circumpoſitæ eſſet Δ, & radius nuclei c; eſſet momentum totius Terræ circa æquatoris diametrum aliquam ut antea revolutæ $= \frac{4}{15} p A^3 C^2 v + \frac{4}{15} p \Delta . \frac{c^5 v}{A}$, adeoque in Probl. III. velocitas rotationis illius puncti, quod maxime a diametro eadem diſtat, ſive v, eſſet $= \frac{3S}{ST^2} . \frac{mnB.A.C^4 dt}{A^3C^2 + \Delta c^5}$. Hoc autem poſito erueretur deviatio axis totius compoſitæ rotationis $\frac{3S}{ST^2} . \frac{mnB.C^4}{A^3C^2 + \Delta c^5} . \frac{dt^2}{ds}$, atque eſſet medius nodorum motus $\frac{3\sqrt{(1-\pi^2)}B.C^4 dz}{2t.(A^3C^2 + \Delta c^5)}$, ſeu proxime $\frac{3\sqrt{(1-\pi^2)}.Bdz}{2tA.\left(1 + \frac{\Delta c^5}{A^5}\right)}$.

Corollarium V.

Si ſit $A:c = 5:3$, & $1 + \Delta : 1 = 10:1$, ac $B:A = 1:201$, fiet ob vim Solis annua æquinoctiorum præceſſio $= 24\frac{1}{3}'' . \frac{1}{1 + \frac{2187}{3125}} = 14\frac{1}{3}''$: in quacumque vero alia hypotheſi nuclei ſphærici, ac denſioris, ſemper minor erit præceſſio quam in priori hypotheſi Terræ homogeneæ. Si Δ ſit quantitas negativa, & nucleus ſtatuatur rarior materia circumpoſita, aut ſi, poſita $\Delta = -1$, interius ſpatium omni materia vacuum intelligatur, æquinoctiorum præceſſio prodibit major quam in hypotheſi homogeneitatis.

Corollarium VI.

Si $\sqrt{(1-\pi^2)}$ deſignet coſinum inclinationis lunaris æquatoris ad eclipticam, &, quia inclinatio omnis eſt circiter duorum graduum, pro coſinu ipſo accipiatur radius, atque inſuper quia Lunæ revolutio circa Terram, & circa axem proprium abſolvitur eodem tempore, fiat $t = 1$, ac denique juxta Coroll. III. Probl. VIII. Lib. II. ſtatuatur $B:A = 1:133690$; eadem formula a Terra ad Lunam translata, in hypotheſi Lunæ totius ſolidæ, & homo-

mogeneæ, ac circa polos compressæ, ut motus diurni ratio postularet, erit motus nodorum æquatoris singulis Lunæ revolutionibus 14.5''.

Corollarium VII.

Quod si inquiratur motus alius nodorum lunaris æquatoris, qui ex forma oblongæ sphæroidis, & attractione Terræ oriri posset, & juxta Coroll. II. Probl. VII. Lib. II. fiat $B : A = 1 : 44600$, atque ob majorem Lunæ diametrum semper obversum Terræ juxta Coroll. I. Probl. II. momentum sphæroidis oblongæ statuatur idem, ac in sphæroide alia oblata iisdem semiaxibus descripta, erit motus periodicus nodorum 43.6''. Neglecta itaque Solis actione, motus omnis nodorum, qui in hypothesi Lunæ oblongæ simul, & oblatæ ex attractione Terræ oriri posset, evaderet annis singulis fere 13'.

Problema V.

Definire motum poli terrestris, & qui circa lineam nodorum, & qui circa eclipticæ axem absolvitur.

Quia regredientibus semper nodis, per Theorema antecedens, figuræ, & rotationis axes, æquatoresque continuis aberrationibus a se invicem sensibiliter non recedunt, sit angularis nodorum motus dy, adeoque sit $A\,dy$ arcus NN', fig. 32., quo nodi regrediuntur in plano eclipticæ, $A\pi\,dy$ perpendiculum NN'' ex puncto prioris nodi N demissum in planum novi æquatoris N'An', & $\frac{A\pi\,dy}{NQ}$, sive $\frac{A\pi\,dy}{AG}$ angulus, quem Æquator NAn, & axis Terræ, ipsi æquatori insistens ad rectos angulos, circa syzigiarum lineam AB simul describunt. Erit $\frac{A.C\pi\,dy}{AG}$ arcus Pp, fig. 37., descriptus a polo telluris p: & quia medius poli motus ex P in p fit circa lineam AB, & in plano, quod per rectam Tz traducitur; si totus poli motus secundum rectam parallelam ipsi Tz resolvatur in duos alios secundum TQ perpendicularem, & Qz parallelam lineæ Nn nodorum; erit prior motus $\frac{TQ.C\pi\,dy}{AG}$, alter vero $\frac{Qz.C\pi\,dy}{AG}$, & ob æquales angulos QTz, GTA, & $AG = Qz$,

ac AG

ac TG = TQ, evadet ille quidem $= \frac{TG.C\pi dy}{AG}$, hic vero $= C\pi dy$. Itaque polus Terræ binos motus præferet, quorum unus parallele ad rectam TQ, & circa lineam nodorum Nn fiet, inclinationemque eclipticæ, & æquatoris variabit angulo $\frac{TG.\pi dy}{AG}$: alter vero, qui parallelus erit rectæ $Q\chi$, efficiet ut polus ipse circa axem eclipticæ TK describat angulum $\frac{C\pi dy}{KP} = dy$, æqualem scilicet angulari nodorum eorumdem motui: atque erit nodorum motus ad variationem inclinationis ut $AG : \pi . TG$, sive ut $\surd(1-\pi^2).CH : \pi . TH$, fig. 32. Est enim in triangulo sphærico ANC cosinus $\surd(1-\pi^2)$ anguli ANC ad sinum totum, ut cotangens arcus CN, sive $\frac{TH}{CH}$, ad cotangentem $\frac{TG}{AG}$ arcus AN, adeoque est $\frac{TG}{AG} = \frac{TH}{\surd(1-\pi^2).CH}$.

Corollarium I.

Præcessio æquinoctiorum erit ad variationem inclinationis eclipticæ, & æquatoris habitam eodem tempore ut $\frac{AG}{TG} : \pi = \frac{CH}{TH} : \frac{\pi}{\surd(1-\pi^2)} = \frac{\surd(1-\pi^2)}{\pi} : \frac{TH}{CH}$, sive ut tangens rectæ ascensionis Solis ad sinum inclinationis eclipticæ, & æquatoris, vel etiam ut tangens distantiæ Solis a punctis æquinoctialibus ad tangentem obliquitatis eclipticæ, sive denique ut cotangens obliquitatis eclipticæ ad tangentem distantiæ Solis a punctis solstitialibus.

Corollarium II.

In quadrantibus NTL, nTl, seu Sole ab æquinoctiis ad solstitia transeunte, augebitur inclinatio eclipticæ, & æquatoris: Sole autem redeunte a solstitiis ad æquinoctia, in quadrante LTn ob TH negativum, & ob CH negativum in quadrante lTN, inclinatio minuetur iisdem gradibus, quibus antea augebatur, & singulis semirevolutionibus Solis restituetur eclipticæ obliquitas in gradum pristinum. In octantibus variatio inclinationis fiet maxima, & ad præcessionis motum se habebit ut $\pi : \surd(1-\pi^2)$.

Co-

Corollarium III.

Si negligatur æquatoris motus qui solam inclinationem afficit, & qui se ipsum compensat singulis Solis, aut Lunæ circa Terram semirevolutionibus; manifestum est motis nodis, & per totam æquatoris peripheriam decurrentibus, axem Terræ circa axem eclipticæ duas conicas superficies sibi invicem in centro obversas describere, & polos Terræ circa polos eclipticæ duos circulos: atque hic motus cum contra ordinem signorum, sive ab oriente in occidentem fiat; stellæ fixæ ab occidente in orientem juxta signorum ordinem videbuntur circa axem eclipticæ revolvi.

Problema VI.

Iisdem positis invenire variationem omnem inclinationis eclipticæ, & æquatoris.

Juxta corollarium primum antecedentis problematis præcessio æquinoctiorum ad variationem inclinationis eclipticæ, & æquatoris dato quocumque elemento temporis se habet ut $1 : \frac{\pi . TH}{\surd(1-\pi^2).CH}$,

& juxta Probl. IV. quo tempore Sol circa Terram describit angulum dz æquinoctiorum præcessio est $\frac{3\surd(1-\pi^2).CH^2.B.dz}{A^2.t}$.

Erit ergo variatio inclinationis dato elemento temporis $\frac{3\pi.CH.TH.dz}{A^2.t}$. Quare si pro angulo ipso dz substituamus elementum cosinus TH divisum per sinum rectum CH, summamque elementorum omnium accipiamus; quia posito Sole in punctis æquinoctialibus, cum TH æquatur radio æquatoris A, variatio inclinationis nulla esse potest, quantitatem constantem debite addendo, toto eo tempore, quo Sol a punctis æquinoctialibus recedet angulo NTC, erit variatio inclinationis Eclipticæ, & Æquatoris $\frac{3\pi.B.\overline{A^2-TH^2}}{2A^2.t} = \frac{3\pi.B.CH^2}{2A^2.t}$. Est autem tota æquinoctiorum præcessio habita eodem tempore $\frac{3\surd(1-\pi^2).B.HCN}{A^2.t}$. Tota igitur æquinoctiorum præcessio erit ad variationem inclinationis habitam eodem tempore ut $\pi.CH^2 : 2\surd(1-\pi^2).HCN$.

Co-

Corollarium I.

Dato elemento temporis variabitur inclinatio in ratione composita sinus, & cosinus distantiæ Solis ab æquinoctiis, sive in ratione simplici sinus distantiæ bis acceptæ, & in octantibus elementaris variatio fiet maxima. Summa autem elementorum omnium hujusmodi, seu tota inclinationis variatio augebitur in duplicata ratione sinus distantiæ a punctis æquinoctialibus, & fiet maxima cum Sol ad solstitialia puncta perveniet: & tota hæc variatio in solstitiis dupla erit, quam quæ octantibus respondet.

Corollarium II.

Et cum media æquinoctiorum præcessio æquetur quantitati $\frac{3\sqrt{(1-\pi^2)}.B}{2A.t}$ ductæ in angulum NTC, cum is fiet quadranti æqualis, scilicet in Solis transitu a punctis æquinoctialibus ad solstitialia erit tota æquinoctiorum præcessio ad variationem inclinationis ut $\sqrt{(1-\pi^2)}.\frac{1}{4}p:\pi$, sive ut arcus quadrantis circuli $\frac{1}{4}p$ ad tangentem $\frac{\pi}{\sqrt{(1-\pi^2)}}$ inclinationis mediocris eclipticæ, & æquatoris. Tota vero inclinationis variatio habita eodem tempore æqualis erit quantitati $\frac{6\pi.B.90^\circ}{pA.t}$.

Corollarium III.

Erit etiam tota eadem variatio quarta proportionalis ad $\frac{1}{4}p$, $\frac{3\sqrt{(1-\pi^2)}.B.90^\circ}{2A.t}$, & $\frac{\pi}{\sqrt{(1-\pi^2)}}$: scilicet motus Solis erit ad motum præcessionis æquinoctiorum vi Solis genitæ ut tangens inclinationis mediocris eclipticæ, & æquatoris ad tangentem variationis totius ejusdem inclinationis. Si fiat $\pi = \frac{2}{5}$ circiter, & $\frac{B}{A} = \frac{1}{231}$, in hypothesi scilicet Terræ totius solidæ, & homogeneæ erit maxima inclinationis variatio circiter $1\frac{1}{2}''$.

Problema VII.

Si Terra omnis exterior ad annulum solidum reducatur æquatori sphæræ inscriptæ circumpositum, invenire nodorum motum.

Cum terræ exterioris quantitas sit $\frac{4}{3}pC^2B$, juxta Cor.I. & II. Probl., si ea omnis consisteret in loco A, fig. 33., atque esset vis acceleratrix Solis $\frac{3M}{ST^3}.mn.C$, & $\frac{3M}{ST^3}.mn.C^2.dt$ momentum velocitatis particulæ uniuscujusque; esset etiam $\frac{3M}{ST^3}.mn.\frac{4}{3}pC^4B.dt$ momentum materiæ ejusdem exterioris ad totam Terram inclinandam circa æquatoris diametrum Zz, ac fieret momentum omne $\frac{2M}{ST^3}.mn.pC^4B.dt$ si materies ipsa per totum æquatoris circuitum disponeretur ad modum annuli. Quia vero in circulari annulo circa diametrum aliquam nutante velocitas particulæ uniuscujusque debet esse distantiæ simplici, & momentum quadrato distantiæ a diametro, quæ est axis motus proportionalis: summa autem quadratorum omnium hujusmodi dimidia est summæ totidem quadratorum radii; si maxima nutationis velocitas vocetur v, erit totum momentum annuli $\frac{4}{3}pC^2B.\frac{C^2v}{2C}$. Momentis igitur ut antea exæquatis fiet $v = \frac{3M}{ST^3}.mn.C.dt$: & velocitatem hujusmodi dividendo per velocitatem diurni motus $\frac{C.ds}{dt}$ fiet tangens deviationis axis compositæ rotationis $\frac{3M}{ST^3}.mn.\frac{dt^2}{ds}$. Tum vero iisdem reassumptis quarti problematis substitutionibus fiet angularis motus nodorum annuli $\frac{3M}{ST^3}.mn.AG.\frac{dt^2}{A.ds} = 3\surd(1-\pi^2).CH^2.\frac{dz}{C^2.t}$, & motus medius erit $\frac{3}{2t}\surd(1-\pi^2).dz$.

Corollarium.

Cum itaque motus maximus nodorum Lunæ, quæ diurno motu in æquatore Terræ revolvatur, & quæ quadrante integro a nodis cum Sole distet, esse debeat $\frac{3}{t}\surd(1-\pi^2).dz$: & motus medius singulis Lunæ hujus revolutionibus pro data Solis distantia a nodis debeat esse

esse $3\sqrt{(1-\pi^2)}.\frac{CH^2.dz}{2C^2.t}$: & motus medius annuus pro quovis Lunæ, Solis, nodorumque aspectu sit $\frac{3}{4t}\sqrt{(1-\pi^2)}.dz$, ut initio libri tertii alterius partis jam dictum est; motus medius nodorum annuli duplo major erit motu medio nodorum Lunæ, quæ in ipso annuli, & æquatoris terrestris plano circa Terram diurno motu revolvi intelligatur. Idem etiam annuli motus $\frac{3}{2t}\sqrt{(1-\pi^2)}.dz$ ad præcessionem mediam æquinoctiorum $\frac{3}{2t}\sqrt{(1-\pi^2)}.\frac{Bdz}{A}$ se habebit ut major semiaxis Terræ ad semiaxium differentiam.

SCHOLION.

Ut indicemus quanam ratione authores alii instituto calculo in ipsam Newtoni hypothesim reciderint æqualitatis motus medii nodorum & Lunæ, & annuli, observandum est idipsum etiam ex formulis superioribus erui, dato quod sinus totus ad sinum deviationis axis se habere debeat non ut velocitas, sed ut momentum diurnæ rotationis annuli ad momentum rotationis, quæ ob vires Solis circa annuli diametrum gigni posset. Est enim $\frac{4}{3}pB.\frac{C^4.ds}{dt}$ momentum quantitatis materiæ $\frac{4}{3}pB.C^2$ circa æquatoris circulum uniformiter distributæ, & velocitate $\frac{C.ds}{dt}$ revolutæ circa axem Terræ: atque est $\frac{3M.mn.}{ST^3}\frac{2}{3}pB.C^4.dt$ momentum annuli ob vires Solis circa diametrum aliquam nutantis. Quod si igitur in fig. 32. esset $Ar:rm$ ut momentum prius ad momentum hujusmodi posterius, esset deviatio axis compositæ rotationis $\dfrac{\frac{3M.mn.}{ST^3}\frac{2}{3}pB.C^4.dt^2}{\frac{4}{3}pB.C^4.ds}$, factisque iisdem substitutionibus, quæ antea, angularis nodorum motus evaderet $3\sqrt{(1-\pi^2)}.\frac{CH^2.dz}{2C^2.t}$, & motus medius $\frac{3}{4t}\sqrt{(1-\pi^2)}.dz$.

Jam vero in Theor. III. & IV. Lib. I. demonstravimus non quidem momenta, sed velocitates duarum rotationum componi inter se invicem, sicuti etiam in motibus liberis non virium, & momentorum, sed velocitatis, & motus est compositio: nec componuntur vires nisi cum vires ipsæ sunt velocitatibus genitis proportionales. Cum de Terra omni agitur, ad inveniendam deviationem axis, & æquatoris perinde est aut momenta, aut velocitates utriusque rotationis circa axem, & circa diametrum aliquam æquatoris conceptæ inter se componere: ob Terram enim proxime sphæricam momenta sunt proportionalia quamproxime velocitatibus angularibus duarum rotationum. At alia penitus annuli ratio est, ut etiam Simpsonius ad calcem suæ dissertationis adnotaverat. Angularis enim velocitas, quam particulæ singulæ circa aliquam diametrum annuli concipiunt, duplo major est angulari velocitate, quæ eadem vi gigni posset circa axem plano annuli perpendiculariter in centro eductum. Quo posito si motus medius nodorum annuli assumatur $\frac{3}{4t}\sqrt{(1-\pi^2)}.dz$, ducaturque in $\frac{2}{5}$, quæ juxta Cor. II. Probl. I. est ratio virium in æquatore, & tota terra exteriori agentium, imminuaturque in ratione quantitatis motus annuli ad summam quantitatum motus annuli, & globi inclusi, proxime eadem præcessio habebitur, quam in Coroll. II. Probl. VI. supputavimus: & si $\frac{3}{5t}\sqrt{(1-\pi^2)}.dz$ minuatur in ratione quantitatis momenti annuli ad summam momentorum annuli, & globi, ut in introductione libri hujus dictum est, eadem præcessio habebitur, quæ iisdem calculis superioribus respondet.

Ita igitur binis correctis Newtoni principiis, & quod motum nodorum annuli, & quod motus totius distributionem respicit, reliquis omnibus accurate jam procedentibus, ipsa Newtoni, & Valmeslej methodus æque problemati satisfaciet. In alia vero Simpsonii, & Sylvabellii methodo viribus centripetis recte inter se comparatis, & calculis congruentibus, corrigendum dumtaxat erit principium, quo assumebatur singulis elementis temporis non novum quidem æquatorem diurni motus exsurgere, sed eumdem semper æquatorem inclinari circa illam diametrum, quæ Soli obvertitur. Et licet singulis semirevolutionibus æquator totius compositæ rotationis in æquatorem figuræ recidat, ut in præmisso Theoremate ostendimus, ac regredientibus semper nodis, neglectaque exigua variatione inclinationis assumi possit continuato motu æquatorem circa omnes diametros inclinari, & axem diurni motus circa axem eclipticæ duas conicas

nicas ſuperficies ſibi invicem in centro obverſas deſcribere, ut in Probl. V. dictum eſt; id tamen nec valet pro ſingulis elementis temporis, nec ſine demonſtratione poterat aſſumi. Quod ſi quis demonſtrationem ex aliis theorematis præcedentibus ſupplere velit, & minus accuratas ſcribendi formulas in prioribus Simpſonii, & Sylvabellii lemmatis corrigere, ſimul jam conciliata habebit omnia, quæ ab authoribus celebrioribus hacce in re exarata ſunt. In noſtra hac ſolutione, cum accurate omnia, & perſpicue pateant, neque ea etiam habetur abſurdi ſpecies, quam aliæ quædam ſolutiones videntur exhibere, ut in ipſo motus initio, & viribus perturbatricibus primum agere incipientibus poli terreſtris motus aliquis prodeat. Id etiam patet ex Coroll. IV. Probl. IV. In duobus capitibus ſubſequentibus æquationes omnes præceſſionis, & nutationis phænomena ſimili methodo colligentur, iiſdemque variationum formulis a Terra ad Lunam translatis manifeſtum erit quibus in caſibus nullus ſit motus nodorum lunaris æquatoris, nullum pariter in terreſtri æquatore motum haberi poſſe: quod argumentum ingenioſe præoccupaverat D. la Grange in jam citata diſſertatione.

CAPUT TERTIUM.

DE PRÆCESSIONIS MEDIÆ ÆQUATIONE.

PROBLEMA VIII.

DAto motu nodorum æquatoris terreſtris in plano lunaris orbitæ, invenire nodorum motum in plano eclipticæ.

Sint N, *n*, fig. *36.*, duo puncta in quibus æquator Terræ ANB*n* ſecat eclipticam CN*n*: M, *m* puncta, in quibus ſecat ecliptica lunarem orbitam DM*m*: O, *o* interſectiones lunaris orbitæ, & æquatoris, ac denotet N punctum æquinoctii verni, M nodum aſcendentem Lunæ. Si D*h*, A*g* ſint perpendiculares ex D, & A ductæ in lineam O*o*, & per M ducatur arcus circuli maximi MP plano æquatoris perpendicularis, & vis perturbatrix Solis ad vim perturbatricem Lunæ ſe habeat ut 1:Q, erit juxta Probl. IV. angularis motus nodorum æquatoris terreſtris in plano lunaris orbitæ $\frac{3\,Q.\,\text{coſ.}\,AOD.\,Dh^2.\,Bdz}{1\,A^2}$, & arcus, quo nodus O regredietur, erit $\frac{3\,Q.\,\text{coſ.}\,AOD.\,Dh^2.\,Bdz}{1\,A^2}$. Erit vero arcus ipſe ad arcum, quem no-

punctum O circa æquatoris radium AT, regrediente nodo, describet, ut sinus totus ad sinum anguli POM, sive AOD. Rursus similes arcus, quos puncta æquatoris O, & N circa eumdem radium AT describent, proportionales erunt sinubus angulorum OTA, NTA, sive perpendiculis Ag, AG. Denique arcus ita descriptus a puncto N erit ad arcum, quo nodus N regredietur in plano eclipticæ CNn ut $\pi : 1$. Quare compositis rationibus erit arcus, quo nodus æquatoris N regredietur in plano eclipticæ ob vim Lunæ $\frac{3\,Q.\,\text{sin. AOD}.\,\text{cos. AOD}.\,Dh^2.\,AG.\,B\,dz}{\pi\, s.\, Ag.\, A^2}$: quam quantitatem dividendo per radium A, & pro Dh^2 substituendo valorem medium $\frac{1}{2}A^2$, fiet motus medius angularis ipsius nodi $\frac{3\,Q.\,\text{sin. AOD}.\,\text{cos. AOD}.\,AG.\,B\,dz}{2\,\pi\, s.\, Ag.\, A}$.

Corollarium I.

Cum sit $\frac{AG}{AT} = \text{sin.}\,\overline{AO \mp NO} = \text{sin.AO. cos.NO} \mp \text{cos.AO. sin.NO}$, & posteriore termino omisso, qui ambiguitate signi in integra circulari peripheria debet destrui, fiat $AG = Ag.\,\text{cos. NO}$; evadet motus medius nodorum æquatoris terrestris in plano eclipticæ vi Lunæ genitus $\frac{3\,Q.\,\text{sin. AOD}.\,\text{cos. AOD}.\,\text{cos. NO}.\,B\,dz}{2\,\pi\, s\, A}$.

Corollarium II.

Cumque insuper in triangulo sphærico obliquangulo MON sit sin. MON : sin. OMN = sin. MN : sin. NO, si cosinus arcus MN fiat $= \pm q$, & sinus $= \sqrt{(1 - q^2)}$, ac sinus inclinationis OMN lunaris orbitæ ad eclipticam vocetur l, erit sin. NO $= \frac{l.\,\sqrt{(1 - q^2)}}{\text{sin. AOD}}$, & cos. NO $= \sqrt{\left(1 - l^2.\,\frac{\overline{1 - q^2}}{\text{sin.AOD}}\right)}$, & ob exiguam lunaris orbitæ inclinationem negligendo quadratum sinus l, fiet cosinus arcus NO proxime æqualis radio, & medius nodorum eorumdem motus in plano eclipticæ evadet $\frac{3\,Q.\,\text{sin. AOD}.\,\text{cos. AOD}.\,B\,dz}{2\,\pi\, s\, A}$.

PROBLEMA IX.

Data distantia nodi ascendentis lunaris orbitæ a puncto æquinoctii verni invenire præcessionem æquinoctiorum.

Quia angulus OMP est differentia duorum angulorum NMP, NMO, erit fin. OMP = fin. NMP. cof. NMO — cof. NMP. fin. NMO. Insuper ex doctrina sphæricorum in triangulo sphærico rectangulo MPN erit fin. NMP : cof. MNP = fin. OMP : cof. MOP, adeoque erit $\text{cof. MOP} = \text{cof. AOD} = \frac{\text{fin. OMP . cof. MNP}}{\text{fin. NMP}} =$

$\text{cof. NMO . cof. MNP} - \frac{\text{fin. NMO . cof. MNP . cof. NMP}}{\text{fin. NMP}}$. Erit denique ex sphæricis cosinus arcus MN ad finum totum ut tangens complementi anguli MNP, five $\frac{\text{cof. MNP}}{\text{fin. MNP}}$, ad tangentem anguli NMP, five $\frac{\text{fin. NMP}}{\text{cof. NMP}}$, adeoque erit $\frac{\text{cof. NMP}}{\text{fin. NMP}} = \text{cof. MN} . \frac{\text{fin. MNP}}{\text{cof. MNP}}$.

Quare erit cof. AOD = cof. NMO . cof. MNP — fin. NMO . fin. MNP . cof. MN $= \sqrt{(1-\pi^2)} . \sqrt{(1-l^2)} \mp \pi l q$, & neglecto rursus quadrato l^2 fiet cof. AOD $= \sqrt{(1-\pi^2)} \mp \pi l q$, & fin. AOD $= \sqrt{(1-1+\pi^2 \pm 2\pi l q \sqrt{(1-\pi^2)} - \pi^2 l^2 q^2)} = \pi \pm l q \sqrt{(1-\pi^2)}$, ac fin. AOD . cof. AOD $= \pi \sqrt{(1-\pi^2)} \pm l q . (1 - 2\pi^2)$: & valore hujusmodi in formula Corollarii antecedentis substituto evadet motus medius nodorum vi Lunæ genitus

$$\frac{3 Q . (\pi \sqrt{1-\pi^2} \pm l q . \overline{1 - 2\pi^2}) . B d z}{2 \pi s A}.$$

COROLLARIUM I.

Formulæ hujusmodi pars prior $\frac{3 Q . \sqrt{(1-\pi^2)} . B d z}{2 s A}$ exprimet præcessionem mediam æquinoctiorum vi Lunæ genitam pro loco quolibet nodi ascendentis lunaris orbitæ. Pars vero altera $\frac{\pm 3 Q . l q . (1 - 2\pi^2) . B d z}{2 \pi s A}$ exprimet præcessionis mediæ æquationem, quæ pendet ex vario nodi ipsius ascendentis loco.

Co-

Corollarium II.

Atque erit æquatio eadem ut cosinus distantiæ MN nodi ascendentis M lunaris orbitæ a puncto æquinoctii N, aut n: & quia nodi etiam lunaris orbitæ feruntur contra ordinem signorum, in regressu nodi ipsius ascendentis ab æstivo solstitio F ad æquinoctium vernum N, & inde ad solstitium hyemale f positivus manebit cosinus arcus MN, & motus verus præcessionis major erit medio: & contra nodo ab hyemali solstitio ad æstivum redeunte, cosinus ipse evadet negativus, & verus præcessionis motus minuetur iisdem gradibus, quibus antea augebatur.

Corollarium III.

Nodo ascendente in punctis æquinoctialibus constituto, ac posito $q = 1$, fiet maxima præcessionis æquatio $\frac{\pm 3 Q . l . (1 - 2\pi^2) . B dz}{2\pi t A}$, & ad motum medium præcessionis $\frac{3 Q . \surd (1 - \pi^2) . B dz}{2 t A}$ se habebit ut $\pm l . (1 - 2\pi^2) : \pi \surd (1 - \pi^2)$.

Quapropter si media æquinoctiorum præcessio ex viribus Lunæ orta vocetur P, & nodus ascendens lunaris orbitæ jaceat in puncto æquinoctii verni, vel autumnalis, differentia mediæ præcessionis, & præcessionis maximæ, vel minimæ erit $\frac{\pm P . l . (1 - 2\pi^2)}{\pi \surd (1 - \pi^2)}$.

Corollarium IV.

Est vero $1 - 2\pi^2 = 2(1 - \pi^2) - 1$, qui est cosinus duplæ inclinationis eclipticæ, & æquatoris, atque est $\pi \surd (1 - \pi^2)$ dimidius sinus ejusdem duplæ inclinationis, adeoque est $\frac{\pi \surd (1 - \pi^2)}{1 - 2\pi^2}$ dimidia duplæ inclinationis tangens. Itaque tangens duplæ inclinationis eclipticæ, & æquatoris erit ad sinum duplæ inclinationis eclipticæ, & orbitæ lunaris ut media æquinoctiorum præcessio vi Lunæ genita ad differentiam præcessionis mediæ, & præcessionis maximæ, vel minimæ.

Problema X.

Data æqnatione maxima præcessionis invenire æquationem omnem, quæ dato temporis, & dato loco nodorum lunaris orbitæ respondet.

Sum-

Summa motuum omnium mediocrium præceſſionis erit ad totam præceſſionis æquationem, quo tempore nodus aſcendens M lunaris orbitæ ab æquinoctio verno N regredietur per arcum quemcumque MN, ut ſumma omnium $\pi \surd(1-\pi^2)$ in integro eodem arcu acceptorum ad ſummam totidem $\pm lq.(1-2\pi^2)$. Et quia ſumma omnium q, ſive coſinuum arcus MN, eſt ſinus rectus ipſius arcus; motus medius præceſſionis erit ad totam medii motus æquationem in tranſitu nodi aſcendentis lunaris orbitæ ex N in M ut $\pi \surd(1-\pi^2)$. MN: $\pm l.(1-2\pi^2)$. Sin. MN: ſcilicet erunt quantitates hujuſmodi inter ſe in ratione compoſita tangentis duplæ inclinationis eclipticæ, & æquatoris ad ſinum duplæ inclinationis lunaris orbitæ, & arcus diſtantiæ a punctis æquinoctialibus ad ejus ſinum. Quare dum nodus ipſius orbitæ a punctis æquinoctialibus recedet quadrante integro, tota præceſſio æquinoctiorum ſe habebit ad æquationem maximam ut $\frac{1}{4}p\pi\surd(1-\pi^2)$: $\pm l.(1-2\pi^2)$, & ſi æquatio hæc maxima vocetur R, pro eo tempore, quo diſtantia MN nodi a punctis æquinoctialibus arcu quocumque c augebitur, erit æquatio omnis R. (ſin. $\overline{\text{MN}+c}$ — ſin. MN).

COROLLARIUM I.

Cum ſit 19° 21′ regreſſio annua nodi aſcendentis lunaris orbitæ in plano eclipticæ, ſi inſuper ſit MN diſtantia nodi aſcendentis a punctis æquinoctialibus dimidio anno quovis propoſito, adeoque ineunte anno ſit MN $-9\frac{2}{3}$°, & anno labente MN $+9\frac{2}{3}$°, æquatio $\overline{\text{mediæ præceſſionis erit pro}}$ anno eodem integro $=$ R. (ſin. $\overline{\text{MN}+9\frac{2}{3}^\circ}$ — ſin. $\overline{\text{MN}-9\frac{2}{3}^\circ}$) $=$ 2 R. coſ. MN. ſin. $9\frac{2}{3}$°, proportionalis ſcilicet coſinui diſtantiæ nodi aſcendentis a punctis æquinoctialibus.

COROLLARIUM II.

Æquatio hæc annua præceſſionis mediocris æquinoctiorum eamdem habebit legem, quam in Coroll. II. Probl. IV. eſſe diximus differentiæ medii, & veri motus præceſſionis. Scilicet in regreſſu nodi aſcendentis ab æſtivo ſolſtitio ad hyemale æquatio eadem annua præceſſionem mediam augebit, totamque præceſſionem annuam efficiet maximam nodo ipſo ad æquinoctium vernum delato. In ſemirevolutione nodi altera contrarium accidet, & annua præceſſio minima habebitur nodo aſcendente in puncto æquinoctii autumnalis conſtituto.

Corollarium III.

Tota autem præceſſionis æquatio, quæ habebitur dum nodus idem regredietur ex N in M, proportionalis erit ſinui arcus MN: & quia ſinus ipſe poſitive accipi debet dum nodus aſcendens lunaris orbitæ a puncto æquinoctii verni N regredi incipit ab hyemale ſolſtitium f; tota ipſa æquatio præceſſioni mediæ addenda erit in ſignis meridionalibus, ac in ſignis borealibus ſubtrahenda, & tum demum fiet maxima cum nodus aſcendens perveniet ad puncta ſolſtitialia, & ſinus arcus MN fiet æqualis radio.

Problema XI.

Iiſdem poſitis invenire æquationem eamdem maximam.

Quia per ſuperius problema præceſſio media æquinoctiorum eo tempore habita, quo nodus aſcendens lunaris orbitæ a punctis æquinoctialibus tranſit ad ſolſtitialia, ſe habet ad totam æquationem maximam ut $\frac{1}{4} p \pi \surd(1-\pi^2) : \pm l.(1-2\pi^2)$, ſi motus medius nodi aſcendentis lunaris orbitæ ad motum medium præceſſionis æquinoctiorum vi Lunæ genitum ſe habeat ut $n : m$, ſitque adeo $n-m : m$ ut media nodi regreſſio a punctis æquinoctialibus ad motum medium punctorum eorumdem, & ſit $\frac{m}{n-m}.90^\circ$ motus medius præceſſionis, quo tempore aſcendens nodus a punctis æquinoctialibus recedit quadrante integro; erit $\frac{\pm(1-2\pi^2).ml.90^\circ}{\frac{1}{4}p\pi(n-m)\surd(1-\pi^2)}$ maxima differentia mediæ, ac veræ præceſſionis æquinoctiorum. Eſt autem radius ad peripheriam ut 50000 : 314159, adeoque eſt $\frac{90^\circ}{\frac{1}{4}p} = 57.29578^\circ$. Erit itaque æquatio maxima totius mediæ præceſſionis æquinoctiorum $\frac{\pm ml(1-2\pi^2)57.29578^\circ}{\pi(n-m)\surd(1-\pi^2)}$.

Corollarium I.

Motus medius præceſſionis $\frac{m}{n-m}.90^\circ$ ad totam præceſſionis æquationem habitam in tranſitu nodi aſcendentis lunaris orbitæ a punctis æquinoctialibus ad ſolſtitialia ſe habebit in ratione compoſita qua-

quadrantis $\frac{1}{4}p$ ad radium, & tangentis $\frac{2\pi\surd(1-\pi^2)}{1-2\pi^2}$ duplæ inclinationis eclipticæ, & æquatoris ad $2l$ duplum finum inclinationis lunaris orbitæ ad eclipticam.

Corollarium II.

Si fit $n:m$ ut motus medius nodorum lunaris orbitæ ad motum medium nodorum lunaris æquatoris vi Terræ genitum, ac posito $n = 19^\circ\ 21'$, in hypothesi Lunæ totius solidæ, & homogeneæ, simulque compressæ ad polos, & Terram versus oblongæ, juxta Corol. VII. Probl. IV. fit $m = 13'$: atque insuper, quia inclinatio lunaris orbitæ ad eclipticam est circiter $5^\circ\ 9'\ 8''$, fiat $l = 0.08979$, & quia inclinatio æquatoris lunaris ad eclipticam est 2° circiter fiat $\pi = 0.0348995$; erit circiter $1\frac{2}{3}^\circ$ æquatio medii motus nodorum lunaris æquatoris, quæ ex forma oblatæ simul, & oblongæ sphæroidis annis singulis oriri poterit.

Scholion.

Æquationes has medii motus præcessionis æquinoctiorum sua singuli methodo tradiderunt, qui post Newtonum resolvendo problemati dederunt operam, Alembertius, Eulerus, Simpsonius, Walmeslejus, Silvabellius. Elegantia theoremata, quæ recensentur in corollariis Probl. IX., & XI., mihi humanissime communicavit cum Pisis esset Clariss. Walmeslejus, ac deinde publici juris fecit in Prop. II., & III. memoratæ dissertationis. Et quidem si ob parvitatem minime negligeretur quadratum sinus inclinationis lunaris orbitæ ad eclipticam aliis adhuc theorematis esset locus. Supputato enim quadrato l^2 evaderet cos. AOD $= \surd(1-\pi^2)\surd(1-l^2) \mp \pi l q$, & sin. AOD $= \pi\surd(1-l^2) \pm l q \surd(1-\pi^2)$, ac fieret æquinoctiorum præcessio vi Lunæ genita $= \frac{3Q}{2\pi t A}\cdot\big(\pi\surd(1-\pi^2)$

$(1-l^2) \pm l q.(1-2\pi^2)\surd(1-l^2) - \pi l^2 q^2 \surd(1-\pi^2)\big).B\,dz$. Hoc autem dato cum terminus $\pm\, l q$ una revolutione nodi ascendentis lunaris orbitæ destruatur oppositione signi, cumque $\frac{3Q\surd(1-\pi^2).B\,dz}{2tA}$ sit media præcessio quam Luna gigneret si in plano eclipticæ revolveretur; erit præcessio ipsa in hypothesi Lunæ revolutæ in plano eclipticæ ad præcessionem veram

ut $1:1-l^2-l^2q^2$. Quare pro q^2 substituendo valorem medium $\frac{1}{2}$, erit tota præcessio media in hypothesi Lunæ revolutæ in ecliptica ad præcessionem mediam in hypothesi Lunæ in orbe suo revolutæ ut $1:1-\frac{3}{2}l^2$, & motus medius præcessionis in priori hypothesi erit ad differentiam duorum motuum ut duplum quadratum radii ad triplum quadratum sinus inclinationis lunaris orbitæ ad eclipticam. Ex eadem formula accuratius etiam colligitur quæ medii, & veri motus præcessionis differentia dato loco nodorum lunaris orbitæ respondeat, & quæ nodis per datum angulum in plano eclipticæ regredientibus habeatur medii motus totius æquatio: quæ duo in dissertatione Luccæ edita præstitimus. Modo unitatem scribendo pro $\surd(1-l^2)$, & negligendo quadrata l^2, solutionem problematum effecimus breviorem, quod ob exiguam lunaris orbitæ ad planum eclipticæ inclinationem nihil inde emergere possit quod sit sensibile. Subductis etiam numeris definivimus, quæ in Luna homogenea, & solida haberi debeat æquatio medii motus nodorum æquatoris in plano eclipticæ. Hæc autem Lunæ potiori saltem sui parte solidæ hypothesis non adeo a veritate potest abludere cum marium superficies non nisi quintam, aut sextam occupet disci lunaris partem, cum versus Lunæ marginem sint maria, parvæ extensionis singula, atque insulis interspersa, cumque circa medium lunaris disci, ubi vis perturbatrix Terræ esset maxima, qui Snellio, Manilio, & Tychone intercipitur Lunæ tractus, quique inæqualem adeo lucis progressum exhibet, ex fluidis partibus constare nequeat. Cum vero alia nostrorum marium sit ratio æquationes præcessionis mediæ æquinoctiorum supputandæ erunt, ubi ex phænomenis nutationis terrestris axis constabit, quæ sit proportio virium Solis, & Lunæ, & quæ tota præcessio media viribus ipsis respondeat.

CAPUT QUARTUM.

DE NUTATIONE TERRESTRIS AXIS.

PROBLEMA XII.

INvenire variationem inclinationis eclipticæ, & æquatoris vi Lunæ genitam.

Juxta octavi Problematis formulas est $\frac{3Q.\text{cos}.AOD.Db^2.Bdz}{tA^2}$

arcus,

arcus, quo nodus O terrestris æquatoris in plano DOo, fig. 36., lunaris orbitæ regreditur. Patet autem hujusmodi arcum se habere ad arcum alium, quem punctum idem æquatoris O circa radium AT regrediente nodo describet, ut sinus totus ad sinum anguli AOD. Erit itaque $\frac{3Q.\text{fin. AOD.cof. AOD.D}h^2.\text{B}dz}{t\,A^3}$ arcus, & $\frac{3Q.\text{fin. AOD.cof. AOD.D}h^2.\text{B}dz}{t\,A^2.Ag}$ angulus, quem punctum æquatoris O, adeoque etiam æquatoris axis, & polus Terræ circa lineam AT describet. Quod si hic poli terrestris motus circa lineam AT, & secundum lineam ipsi Tz parallelam, fig. 37., ut antea resolvatur in duos alios, quorum unus sit lineæ Nn nodorum parallelus, alter vero sit priori perpendicularis; fiet $\frac{3Q.\text{fin. AOD.cof. AOD.D}h^2.\text{TG.B}dz}{t\,A^2.Ag}$ angulus, quem polus, & axis Terræ describet circa intersectionem planorum æquatoris terrestris, & eclipticæ, quoque variabitur inclinatio eclipticæ ad æquatorem. At insuper, in fig. 36., est TG $=$ Ag. fin. NO $+$ Tg. cof. NO, atque ex Doctrina sphæricorum est $\frac{Tg}{Ag} = \frac{Th}{\text{D}h.\text{cof. AOD}}$.

Itaque erit variatio eadem inclinationis axis, & æquatoris Terræ ad axem, & planum eclipticæ vi Lunæ genita $=$ $\frac{3Q.\text{fin. AOD}}{t\,A^3}.(\text{D}h^2.\text{cof. AOD. fin. NO} + \text{D}h.\text{T}h.\text{cof. NO}).\text{B}dz$.

COROLLARIUM I.

Variationis hujus binæ erunt partes, quarum posterior $\frac{3Q.\text{fin. AOD.D}h.\text{T}h.\text{cof. NO.B}dz}{t\,A^3}$ singulis Lunæ semirevolutionibus oppositione signi rectangulorum omnium Dh. Th in adversis quadrantibus destruetur, prior vero $\frac{3Q.\text{fin. AOD}}{t\,A^3}$.cof. AOD. fin. NO. D$h^2$.B$dz$, ob quadratum D$h^2$ semper positivum minime destruetur una semirevolutione Lunæ, atque exprimet variationem inclinationis, quæ pendebit ex loco nodi ascendentis lunaris orbitæ.

Co-

COROLLARIUM II.

Cum juxta Lem. IX. alterius Partis summam quadratorum omnium Dh^2, & rectangulorum $Dh.Th$ in integro quadrante acceptorum per quartam partem peripheriæ dividendo fit $\frac{1}{2}A^2$ valor medius quadrati Dh^2, & $\frac{2A^2}{p}$ valor medius rectanguli $Dh.Th$, substitutionibus hisce factis variatio media inclinationis æquatoris terrestris ad eclipticam vi Lunæ genita evadet $= \frac{3Q.\text{sin.}AOD}{tA}.(\frac{1}{2}\text{cos.}AOD.\text{sin.}NO + \frac{2\text{cos.}NO}{p}).Bdz$.

PROBLEMA XIII.

Dato motu nodorum lunaris orbitæ invenire variationem omnem inclinationis eclipticæ, & æquatoris.

Cum dato nodorum loco sit $\frac{3Q}{2tA}.\text{sin.}AOD.\text{cos.}AOD.\text{sin.}NO.Bdz$ variatio media inclinationis eclipticæ, & æquatoris revolutionibus singulis Lunæ genita, & per Coroll. II. Probl. VIII. sit $\text{sin.}NO = \frac{l.\surd(1-q^2)}{\text{sin.}AOD}$, ac denique juxta Probl. XI. sit $\text{cos.}AOD = \surd(1-\pi^2) \mp \pi lq$, aut accuratius juxta antecedens Scholion $= \surd(1-\pi^2)\surd(1-l^2) \mp \pi lq$; neglecto posteriore termino, qui in regressu nodi ascendentis ab æquinoctio verno ad autumnale ambiguitate signi destruitur, fiet variatio eadem media $= \frac{3Q.l.\surd(1-\pi^2)\surd(1-l^2)\surd(1-q^2).Bdz}{2tA}$, & ad præcessionem mediam æquinoctiorum in hypothesi Lunæ in plano eclipticæ revolutæ se habebit ut $l.\surd(1-l^2)\surd(1-q^2):1$. Quare dum nodus ascendens lunaris orbitæ a puncto æquinoctii verni N per arcum NM regredietur, erit tota variatio inclinationis ad præcessionem totam habitam eodem tempore ut summa omnium $l\surd(1-l^2).\text{sin.}MN$ ad summam totidem radiorum: & quia summa omnium sinuum rectorum est sinui verso æqualis, in regressu nodi ascendentis ex N in M variatio inclinationis æquatoris terrestris cum plano eclipticæ erit ad præcessionem mediam æquinoctiorum habitam eodem tempore ut $l.\surd(1-l^2)(1\mp q)$ ad arcum MN.

Co-

COROLLARIUM I.

Dum nodus ascendens M a puncto æquinoctii verni N regredietur ad hyemale solstitium f, & inde ad autumnale æquinoctium n, sinus arcus MN positivus erit, atque imminui incipiet vi Lunæ æquatoris inclinatio ad eclipticam, imminueturque ipsa quousque nodus ascendens lunaris orbitæ ad autumnale æquinoctium pervenerit: deinde nodo ab æquinoctio autumnali redeunte ad vernum fiet negativus sinus distantiæ ab æquinoctio, & æquatoris inclinatio augebitur iisdem gradibus, quibus antea imminuebatur.

COROLLARIUM II.

Maxima igitur inclinatio æquatoris terrestris ad eclipticæ planum habebitur dum nodus ascendens lunaris orbitæ erit in loco æquinoctii verni, minima in autumnali æquinoctio, & in utroque solstitio inclinationis variatio dimidia erit variationis maximæ, ac tota æquatoris inclinatio erit media. In regressu nodi ascendentis a solstitiis ad æquinoctia erit differentia mediæ, & maximæ variationis ad differentiam variationis habitæ dato tempore ut $1 : \pm q$. Scilicet variatio inclinationis singulis revolutionibus Lunæ habita proportionalis erit sinui recto distantiæ nodi ascendentis a punctis æquinoctialibus: tota inclinationis variatio habita dum idem nodus dato quocumque angulo ab iisdem punctis regredietur, erit ut sinus versus totius anguli: & differentia mediæ, & veræ inclinationis erit ut anguli ipsius cosinus.

COROLLARIUM III.

Dum nodus ascendens lunaris orbitæ a solstitiis dato arcu ad æquinoctia regredietur, præcessio media æquinoctiorum habita eodem tempore se habebit ad differentiam variationis mediæ, cum nodus idem erat in punctis solstitialibus, & variationis habitæ in fine temporis propositi, sive ad variationem totius inclinationis mediæ æquatoris terrestris, & eclipticæ, ut arcus omnis in regressu nodi percursus, & a solstitio supputatus ad $\pm\, ql . \surd(1 - l^2)$: & valebit superius signum in regressu nodi ascendentis a solstitio æstivo ad hybernum, inferius autem in reditu ad solstitium æstivum.

PROBLEMA XIV.

Data ratione motuum nodi ascendentis lunaris orbitæ, & punctorum æquinoctialium invenire nutationem terrestris axis.

Po-

Positis aliis Probl. XI. denominationibus, si sit $\frac{m}{n-m} . 90°$ motus medius præcessionis æquinoctiorum genitæ ob vim Lunæ eo tempore, quo nodus ascendens lunaris orbitæ quadrante integro regreditur, & si juxta posterius corollarium regrediente nodo a solstitiis ad æquinoctia motus idem medius præcessionis ad variationem inclinationis mediæ se habeat ut $\frac{1}{4} p : \pm q l . \sqrt{(1-l^2)}$; erit $\pm \frac{m l}{n-m} . \sqrt{(1-l^2)} . \frac{360°}{p}$ differentia omnis inclinationis mediæ eclipticæ, & æquatoris, & inclinationis maximæ, sive minimæ. Patet autem æqualibus angulis æquatorem, & axem Terræ inclinari circa intersectionem ipsius æquatoris cum plano eclipticæ. Quare si pro $\frac{360°}{p}$ denuo scribamus $57 . 29578°$, erit $\pm \frac{m l}{n-m} . \sqrt{(1-l^2)} . 57 . 29578°$ angulus omnis, quo axis Terræ circa lineam nodorum æquatoris, & eclipticæ nutabit: & differentia duorum angulorum, quos bini axes æquatoris terrestris, & eclipticæ inter se efficient, nodo ascendente lunaris orbitæ posito in punctis æquinoctii verni, & autumnalis erit
$\frac{2 m l}{n-m} . \sqrt{(1-l^2)} . 57 . 29578°$.

Corollarium I.

Posito $n = m$, idem esset motus nodi ascendentis lunaris orbitæ, & punctorum æquinoctialium in plano eclipticæ, & nodus idem ab iisdem punctis nullo unquam tempore longius posset regredi, nutationisque totius formulæ amplius non esset locus. Reassumendo autem formulam Coroll. I. Probl. XII. manifestum erit, quod si nodus ascendens in punctis æquinoctialibus maneret, posito sin. NO $= 0$, inclinatio etiam eclipticæ, & æquatoris maneret eadem: nodo autem ubilibet constituto, dataque semper ipsius distantia a punctis æquinoctialibus inclinatio eclipticæ, & æquatoris minueretur semper, vel augeretur prout sinus arcus NO positivum, vel negativum valorem obtineret.

Corollarium II.

Pariter si idem esset motus nodorum tum lunaris æquatoris, cum

cum orbitæ lunaris in plano eclipticæ, nulla esse posset sensibilis nutatio, qua æquator ad orbitam lunarem accedat, aut recedat alternis vicibus. Quod si vero reassumptis numeris Coroll. II. Problem. XI., & Coroll. VII. Problem. IV., in formula $\pm \frac{ml}{n-m} . \surd(1-l^2) . 57.29578^\circ$ substituantur valores quantitatum l, m, n, evadet circiter 1′ nutatio lunaris axis, quæ ex forma oblatæ sphæroidis, & circiter 3′ quæ ex sphæroidis oblongæ forma oriri poterit: unde universim ex inæqualitate attractionis terrestris nihil in Luna emerget, quod fieri possit sensibile.

Corollarium III.

Si loco $\surd(1-l^2)$ scribamus unitatem, æquatio maxima inclinationis axis æquatoris terrestris, & eclipticæ, in transitu nodi ascendentis lunaris orbitæ a solstitiis ad æquinoctia, erit ad æquationem maximam præcessionis æquinoctiorum $\frac{\pm ml.(1-\pi^2).57.29578^\circ}{n.(n-m)\surd(1-\pi^2)}$, habitam in nodi transitu ab æquinoctiis ad solstitia, ut $\pi\surd(1-\pi^2) : 1-2\pi^2$, sive ut dimidium sinus ad cosinum duplæ inclinationis eclipticæ, & æquatoris.

Problema XV.

Data quantitate præcessionis mediæ æquinoctiorum invenire quantitatem nutationis.

Cum media æquinoctiorum præcessio, quæ ex viribus Lunæ oritur, sit annis singulis $\frac{3Q}{2tA} . \surd(1-\pi^2) . B . 360^\circ$, & revolutio nodorum lunaris orbitæ in plano eclipticæ absolvatur diebus circiter 6803, sive annis circiter 18.6; erit $\frac{3Q}{8tA} . \surd(1-\pi^2) . B . 18\frac{1}{5} . 360^\circ$ præcessio media, quæ haberi poterit in transitu nodi ascendentis a solstitiis ad æquinoctia. Ea vero esse debet ad variationem inclinationis mediæ æquatoris terrestris cum plano eclipticæ habitam eodem tempore ut $p : \pm 4l . \surd(1-l^2)$, ut supra jam dictum est. Itaque erit $\frac{\pm 3Q}{2ptA} . l . \surd(1-l^2) . \surd(1-\pi^2) . B . 18\frac{1}{5} . 360^\circ$ angulus, quo axis Terræ ad eclipticæ axem nutabit: scilicet dum nodus ascendens luna-

ris orbitæ erit in primis punctis Arietis, juxta Coroll. III. Probl. XIII., polus Terræ prioribus Cancri punctis accedet propius angulo $\frac{3Q}{2p t A} . l . \surd(1-l^2) . \surd(1-\pi^2) . B . 18\frac{1}{2} . 360°$: eodemque angulo inde abibit longius dum nodus idem ascendens ad primæ Libræ puncta perveniet: & tota obliquitatis eclipticæ variatio, seu nutationis quantitas in tota nodi revolutione erit $\frac{3Q}{p t A} . l . \surd(1-l^2) . \surd(1-\pi^2) . B . 18\frac{1}{2} . 360°$.

COROLLARIUM I.

Nutatio omnis terrestris axis vi Lunæ genita ad præcessionem mediam æquinoctiorum $\frac{3}{2 t A}(1+Q) . \surd(1-\pi^2) . B . 360°$ ob vires simul & Lunæ, & Solis genitam annis singulis se habebit ut $2Ql . \surd(1-l^2) . 18\frac{1}{2} : p . (1+Q)$. Quod si igitur tota axis nutatio ex observationibus assumatur $19''$, & annua æquinoctiorum præcessio $50.3''$, reductisque analogiæ hujus terminis fiat $l = 0.08979$, $\surd(1-l^2) = 0.99596$, $1 : p = 50000 : 314159$; prodibit $1+Q : Q = 836663 45 : 59690210$, atque inde eruetur $1 : Q = 1 : 2.49$ satis proxime, ac vires Solis, & Lunæ quam proxime inter se erunt ut $2 : 5$.

COROLLARIUM II.

Quia vires ipsæ Solis & Lunæ debent esse inter se ut materiæ quantitates directe, & cubus distantiarum reciproce, sive ut densitates simul, & cubi diametrorum directe, ac reciproce ut cubi distantiarum, vel denique directe ut densitates, & cubi diametrorum apparentium conjunctim; densitas Solis ad densitatem Lunæ se habebit ut $1 : 2.49$, & cubus apparentis Lunæ diametri ad cubum diametri Solis, sive (diametros mediocres apparentes statuendo $32' 12''$, & $31' 16\frac{1}{2}''$) ut $1 : 2.7175$. Et quia densitas Terræ, juxta Coroll. III. Probl. II. Par. I., ad densitatem Solis se habet ut $351 : 100$; erit densitas Terræ ad densitatem Lunæ ut $35100 : 27175$. Ac denique cum veræ diametri Terræ, & Lunæ sint inter se ut $365 : 100$, & quantitates materiæ sint ut densitates, & cubi verarum diametrorum conjunctim; erunt quantitates materiæ in Terra, & Luna ut $62.808 : 1$.

COROLLARIUM III.

Si annuæ præcessionis quantitas $50.3''$ dividatur in ratione

2.

2.49:1 fiet 35.88'' media præceſſio annua æquinoctiorum, quæ ex Luna, & 14.42'' quæ ex Sole orietur. Tota etiam præceſſio media, quæ ex Luna orietur, quarta parte revolutionis nodi aſcendentis erit 166.8'' circiter: eaque cum juxta formulas Probl. XI. eſſe debeat ad differentiam veræ, & mediæ præceſſionis in nodi tranſitu a punctis æquinoctialibus ad ſolſtitialia ut $p\pi . \surd(1-\pi^2)$: $4 l.(1-2\pi^2)$; ſubſtitutis ut antea numeris prodibit circiter 18'' æquatio maxima, quæ toti præceſſioni mediæ addenda erit dum nodus aſcendens ab æquinoctio verno regredietur ad hyemale ſolſtitium, detrahenda vero dum ab autumnali æquinoctio regredietur nodus ad ſolſtitium æſtivum.

Corollarium IV.

Quod ſi in formula Coroll. I. Probl. X. ſcribamus 18'' loco R, erit æquatio præceſſionis annuæ 36''. coſ.MN. ſin. $9\frac{2}{3}°$ = 6''. coſ. MN, & maxima æquatio annua erit 6'', eaque præceſſioni mediæ addenda erit cum nodus aſcendens lunaris orbitæ ad æquinoctium vernum perveniet, detrahenda vero cum nodus ipſe ad autumnale æquinoctium tranſibit, atque univerſim minuetur in ſimplici ratione coſinus diſtantiæ nodi aſcendentis a punctis æquinoctialibus. Ita cum exeunte Octobri anni 1773 nodi ad prima Libræ puncta pervenerit, pro anno illo minima æquinoctiorum præceſſio cenſeri poterit $44\frac{1}{3}$''. Vera autem præceſſio in mediam $50\frac{1}{3}$'' recidet anno 1778, ac fiet maxima anno 1783, ſcilicet $56\frac{1}{3}$'', ac pro anno quovis propoſito ex dato loco nodi aſcendentis præceſſio ad tabulas reduci poterit.

Corollarium V.

Si fiat ut ſinus totus ad ſinum diſtantiæ nodi aſcendentis lunaris orbitæ a punctis æquinoctialibus, ita 18'' ad quartum, habebitur tota æquatio, quæ dato nodi ipſius aſcendentis loco toti præceſſioni mediæ addenda erit, aut detrahenda. Quare erit 36'' differentia omnis maximæ, & minimæ præceſſionis, ſive differentia angulorum a polo Terræ una nodi aſcendentis revolutione circa polum eclipticæ deſcriptorum. At vero arcus a polo Terræ in hac omni aberratione deſcriptus circa polum eclipticæ, ad centrum Terræ minorem ſubtendet angulum in ratione ſinus inclinationis axium Terræ, & eclipticæ ad ſinum totum, ut ex ſe patet. Quare in hac ipſa ratione minuendo angulum 36'', ac deinde dimidium accipiendo fiet 7'' angulus, quo axis Terræ in plano coluri æquinoctiorum una nodi aſcendentis revolutione hinc inde aberrabit a loco medio.

Corollarium VI.

Et cum nutatio omnis terrestris axis una nodi ascendentis revolutione sit $19''$, erit $9\frac{1}{2}''$ angulus, quo axis terræ in plano coluri solstitiorum eodem tempore aberrabit hinc inde a loco medio. Quod si fiat ut sinus totus ad cosinum distantiæ nodi ascendentis lunaris orbitæ a punctis æquinoctialibus, ita hæc dimidia nutatio, sive variatio dimidia inclinationis eclipticæ, & æquatoris ad differentiam inter variationem dimidiam, & variationem habitam dato tempore, per Coroll. II. Probl. XIII. habebitur tota nutatio, quæ dato nodi ascendentis loco respondebit. Ita si nodus ascendens Lunæ integro signo distet a punctis æquinoctialibus erit nutatio $8\frac{1}{4}''$: si vero inde distet uno signo, atque insuper $10°$, $15°$, $25°$, $30°$ nutatio erit $7\frac{1}{3}''$, $6\frac{2}{3}''$, $5\frac{1}{2}''$, $4\frac{2}{3}''$.

Corollarium VII.

Quod si denique bini motus hujusmodi, quibus Terræ polus aberrat a loco medio, sive in plano coluri æquinoctiorum, sive in plano coluri solstitiorum, componantur inter se invicem, omnis poli aberratio fiet in perimetro ellipseos, cujus centrum sit medius poli locus, major axis exæquet $19''$ circuli unius maximi, & minor dumtaxat $14''$, ac ille quidem in plano coluri solstitiorum, hic vero in plano coluri æquinoctiorum jaceat, ut libri hujus initio dictum est: in quovis enim puncto perimetri hujus ellipseos omnis poli aberratio ab hoc coluro erit ut sinus, ab illo autem coluro erit ut cosinus distantiæ nodi ascendentis lunaris orbitæ a punctis æquinoctialibus.

Scholion.

Habemus itaque ex legibus gravitatis erutum, explicatumque phænomenon longe pulcherrimum, atque erutam etiam habemus proportionem virium perturbatricium Solis, & Lunæ, quantitatemque inæqualitatum omnium terrestris axis, quæ ex iisdem viribus ortum ducunt. Et cum præcessio media æquinoctiorum, quæ ex Sole oritur annis singulis sit fere $14\frac{2}{3}''$, cumque in hypothesi Terræ totius solidæ, & homogeneæ, posito $B:A = 1:231$, sit fere $21\frac{1}{4}''$ media præcessio annua, quæ posset ex Sole oriri; vis omnis, quæ vere a Sole in exteriorem Terram exercetur, quæque ad motum punctorum æquinoctialium impenditur, æquabit circiter duas tertias partes vis omnis, quæ in hypothesi terræ totius solidæ similiter exer-

cere-

ceretur. Si intelligamus tertiam partem materiæ, quæ in exteriori terra circa inscriptam sphæram redundat prope æquatorem fluidam esse, patebit totius phænomeni ratio physica. Cum enim fluida viribus quibuscumque impulsa, & agitata pressionem suam versus quamcumque partem æqualiter in solida corpora exerceant; ex attractione fluidarum partium nullus totius massæ terrestris motus oriri poterit, ut recte ab Alembertio notatum est §. 82. de præcessione æquinoctiorum. Si terra ex stratis sphæroidicis, & accedendo ad centrum densioribus componeretur, differentia ponderum absolutorum in polis, & æquatore major quidem evaderet quam in hypothesi Terræ homogeneæ, quod recensitis jam pendulorum experimentis consonum videri posset: sed major etiam prodiret æquinoctiorum præcessio, quam singula strata sphæroidica ob excessum densitatis augerent, & ad præcessionem ipsam cum observationibus conciliandam plusquam tertia terræ exterioris portio censenda esset fluida, quod affusorum marium considerationi minus consentaneum videri posset: neque enim apparet tantam in exteriori terra esse fluidæ materiæ copiam. Hypothesis nuclei sphærici densioris, quam in Coroll. IV. Probl. IV. proposuimus, eamdem exhibet præcessionis mediæ quantitatem, quæ toti vi perturbatrici Solis responderet, si terra exterior solida esset omnis, aut si præ ipsa fluidæ materiæ quantitas posset omnino negligi, quod falsum est. Idcirco cum ex omnibus hypothesibus eam quæreremus, quæ esset simplicior, & phænomenis omnibus satisfaceret, primo statuimus terrestres axes esse inter se ut 230:231, & aliquam rationis hujus dissensionem a quibusdam graduum mensuris in irregularitates exterioris terræ, & aliquam observationum incertitudinem rejecimus: deinde omnem terram, quæ extra inscriptam sphæram redundat, quinta sui parte rariorem esse censuimus ut pendulorum experimenta explicarentur: ac denique materiæ ejusdem circa æquatorem redundantis tertiam fere partem censuimus esse fluidam, ut præcessionis æquinoctiorum, & nutationis terrestris axis observationibus omnibus satisfieret.

DE

DE ALTITUDINE ET MOTU MARIUM.

LIBER QUARTUS.

MAre bis diebus singulis supra libellam mediam assurgere intumescendo, ac bis infra ipsam deprimi, ac detumescere, binosque fluxus, ac totidem refluxus exhibere omnibus notum est. Notum est etiam quod cum in noviluniis, ac pleniluniis habeatur fluxus cum Sol, & Luna supra horizontem altius assurgunt, refluxus cum circa horizontem loci propositi versantur; maximus tamen fluxus in ipsum Solis, aut Lunæ appulsum ad meridianum loci non incidit, sed duabus, aut tribus horis subsequitur, atque horis totidem refluxus subsequitur Solis, aut Lunæ appulsum ad horizontem. Observationibus etiam repetitis in mari libero innotuit, quod dum Luna a novilunio, aut plenilunio tendit ad quadraturas, & tardius semper quam Sol ad meridiani planum revertitur, intervallum duorum fluxuum diebus duobus se consequentium majus est una solari die, & post quadraturas majus est etiam die lunari. Est enim tempus duos inter appulsus Lunæ ad meridianum loci ejusdem interjacens $24^{h}\ 50\frac{1}{2}'$: & juxta observationes a Clariss. Maskelinio ad insulam *Barbados*, quæ libere Oceano alluitur, anno 1761 institutas, intervallum duorum fluxuum diebus duobus post plenilunium mensis Novembris erat $24^{h}\ 37'$, eratque $25^{h}\ 27'$ diebus duobus post quadraturam proxime subsequentem. Duobus etiam, aut tribus diebus post novilunium, ac plenilunium habentur singulis mensibus æstus maximi, minimi vero æstus diebus totidem post quadraturas. Et quidem tempore verno, & autumnali sunt altitudines maximorum fluxuum post syzigias, & minimorum post quadraturas, Bristolii ante ostium fluvii Avonæ pedum 45, & 25, Plimuthi $20\frac{1}{2}$, & $11\frac{1}{2}$, Maclovii 50, & 15, ut ferunt observationes illæ, quas retulit Newtonus in Propos. XXXVII. Lib. III., & Daniel Bernoullius Cap. VI. de fluxu, & refluxu maris. Augetur etiam maris æstus pro minori Lunæ distantia a Terra, & minori declinatione ab æquatore,

atque

atque ita maximi fluxus menstrui in plenilunia, & novilunia illa incidunt, quæ habentur Luna in perigæo, & æquinoctiali circulo posita. Sunt denique annuæ fluxuum variationes, quod æstus pro minori etiam Solis distantia a Terra augeantur, atque ita hyeme cæteris paribus majores sint quam æstate: quodque insuper bini æstus se proxime consequentes vespere, & mane non sint æquales in locis extra æquatorem positis nisi cum Sol, & Luna versantur in æquatore. In regionibus Septentrionalibus, si Sol, & Luna declinent pariter ad Septentrionem, majores sunt fluxus, qui habentur post appulsum ad superiorem meridiani partem, minores cum Sol, & Luna inde in partem adversam transeunt: quod si vero ad Austrum declinent, priores fluxus minores sunt posterioribus. In regionibus Australibus contrarium accidit. Ex observationibus Sturmii, & Colepressii differentia omnis prodiit quasi unius pedis Plimuthi, & Bristolii 15 digitorum. In iis maribus, quæ ab occidente in orientem late patent, ut in mari Atlantico, Pacifico, & Æthiopico, aqua æstuando attolli solet ad pedes 6, 9, 12, & quandoque etiam 15. In Caspio, & Baltico mari nulli sunt æstus: in toto Hadriatico, & Mediterraneo mari satis exigui.

In maribus iis amplissimis cum aquæ omnes statis temporibus, ac certa lege intumescant, & deinde refluant, continuatam aliquam, ac generalem motus directionem habent ab oriente in occidentem. Ita in Atlantico mari ad Americæ littora excurrunt aquæ, in mari autem Pacifico ab America potius recedere videntur. Communem hunc motum jam diu, ut Varenius refert, nautæ persenserant ubi est vehementior, in toto scilicet mari Pacifico, & ab India orientali usque ad Promontorium Bonæ Spei. In fretis etiam, quæ ad occidentem late patent, præcipue vehemens est maris motus, ut in freto Magellanico, & Mexicano. In ipsis vero maribus amplissimis aliæ adhuc occurrunt peculiares aquarum directiones, quas proprie *currentes* vocant, quæque a generali directione adeo deflectunt, ut alicubi etiam contrariæ sint. Ita ad Peruviæ littora excurrunt aquæ ab austro in boream: atque ex Africæ latere a Promontorio, ut vocant, *Capo Verde*, ad sinum *Fernando-Poo*, excurrunt ab occidente in orientem. Clariss. Buffon To. II. Historiæ naturalis peculiares hos motus ex generali derivandos esse censuerat, atque ex scopulis, quos maris fundus progredientibus aquis objicit. Nam & ubique irregularem esse maris fundum, & alicubi altius assurgere nautarum experimentis compertum est: & dato quod elatior fundus alicubi ad modum aggeris a borea in austrum se porrigat, ac gene-

generalem directionem maris ad occidentem interfecet ad rectos angulos; inde aquas reflecti, & contraria directione impelli in ortum necesse est. Sed venti etiam, & peculiares aliæ locorum, ac littorum circumstantiæ partem sibi aliquam phænomeni totius vindicant. Prope Maldivas enim, aliasque Indici maris insulis eadem currentium, ac ventorum directio est; ex senis scilicet in senos menses contraria. In mari Hadriatico a Corcyrensi insula ad oras Dalmatiæ, & deinde ad Venetæ Ditionis littora, atque Æmiliæ postmodum, ac Flaminiæ eodem semper ordine excurrunt aquæ. Motum hujusmodi binis usque ab hinc sæculis nautæ agnoverant. Montanarius autem spectatis levioribus corporibus aquæ innatantibus velocitatem motus eam esse invenit, qua singulis diebus quatuor fere milliaria absolvantur. Inde insuper Montanarius ipse, & Gulielminus rationem physicam derivarunt, qua flumina in mare influentia primo quidem compositis motibus aliquantulum in dexteram partem deflectant, subinde vero abrupta, & deviata longius excursione maris, aggestisque ad dexteram arenæ cumulis, ad sinistram potius detorqueantur, ac denique adhuc longius provectis aquis, mixtisque, ac retardatis eidem maris directioni se accommodent, a sinistra scilicet in dexteram.

At insuper generali littorum, maris potissimum Hadriatici, perlustratione singulare aliud phænomenon innotuit, mare ipsum alicubi patere latius quam antea, alicubi a littoribus recedere, ubique vero efferre se se altius superficie. Ita, quæ Augusti temporibus Urbs maritima, & Romanorum portus erat, Ravenna, nunc tribus fere milliariis a mari distat: atque, ut ferunt Zendrini observationibus, littus omne Ravenna Anconam usque, longe etiam ab ostiis fluminum, in mare longius semper protendi pergit. Ex adverso autem Dalmatiæ littore, quæ olim erant loca maritima nunc aquis maris alte insidentibus obruuntur. In toto Hetruriæ littore, ad Nili ostia, in Batavia omni, & circa sinum Balticum continentis terræ prolatio in primis magna, & undique satis nota est. Oritur id non ex turbidis tantum fluminibus, quæ limum, & ponderosiora alia corpora hinc inde dejiciunt prope ostium, verum etiam ex ventorum directione, & tempestatum vi, quæ materiam avulsam e fundo maris alicubi ad littora devolvunt, quæque alicubi e contra abrasis littoribus undas sinunt latius excurrrere. Bina hæc phænomena cum eodem tempore aliis in locis haberi possint, cumque diversis temporibus eodem etiam in loco sibi invicem possint succedere, ut variationes integri maris inquirerent Manfredius, & Zendrinus maris superficiem

ciem ad loca quædam fixa, & immobilia referre cœperunt, collatisque observationibus deprehenderunt Hadriaticum mare se se altius efferre successu temporis, nec a quibusdam littoribus recedere nisi quia plus peculiares caussæ ad elationem eorum littorum quam generales ad elationem maris conducunt. Zendrinus observationem protulit Veneti fori, & porticus antiquissimæ, ubi ad arcendas æstuantes aquas pavimentum omne altius efferre oportuit, quam cum primo extructum fuerat: addiditque insuper subterraneum solum D. Marci extillantibus circum parietibus derelictum modo esse cum nono sæculo publicis hominum conventibus patuerit. Manfredius absoluta libellatione pavimenta trium Ecclesiarum, quæ duodecim fere ab hinc sæculis Ravennæ extructa sunt, infra æstuantis maris superficiem ita deprimi agnovit, ut si adhuc mare urbem illam allueret, & aquæ maris, & pluviæ, nisi aggeribus inde arcerentur, undique illabi, & fœdare deberent omnia.

Cum hasce omnes Manfredius, aliasque analogas observationes Bononiensi Academiæ proposuisset, in cursu Physico Hartsoekeri edito Hagæ Comitum anno 1730, conjecturas quasdam invenit, quæ Batavum mare, & Germanicum superficie similiter altius se se efferre indicarent. Primo enim visum est Hartsoekero præaltos aggeres, quibus mare a boreali, atque orientali Bataviæ parte coercetur, primum extrui in ipso maris undique effusi sinu minime potuisse, nisi mare olim depressius superficie, quæ modo excisis aggeribus exundaret littora, non attigisset. Cumque insuper Hartsoekerus considerasset antiquos aggeres verticaliter erectos declivitate omni carere, conjecit ipsos non totos uno tempore, sed per partes, & temporum intervalla exstructos esse, prout elevatio superficiei maris per gradus singulos aucta est. Denique idem author eamdem attigit quam Manfredius rationem physicam altitudinis maris perpetuo auctæ, terram videlicet, & ponderosa alia corpora, quæ torrentes ac flumina in mare perpetuo inferunt, & quibus subsidentibus maris fundum, adeoque etiam superficiem efferri altius necesse est. Et quidem Manfredius positis aliquot hypothesibus, ut quod marium superficies sit minor quam dupla superficies omnis terrarum, quod tertia fere pars aquæ e cælo decidentis, & pollices 18 annis singulis exæquantis in mare ex alveis fluminum devehatur, quod aquæ fluentes partem circiter $\frac{1}{174}$ terræ admixtam habeant, invenit elationem maris pollicum quinque annis 348 censeri posse, & majorem adhuc evadere si glareæ, saxorumque

rumque a fluminibus provolutorum habeatur ratio. Eos elationis limites Manfredius observationi illi conformes deprehendit, qua retulit Zendrinus scabellum marmoreum, prope curiam D. Marci Venetiis, ineunte sæculo decimo sexto, naviculariorum frequentissime insilientium commodo extructum, nunc fere dimidio pede infra æstuantis maris superficiem jacere. Cum ibi ergo, & in amplioribus ædibus omnibus, quas memoravimus, nec disrupta alicubi pavimenta, nec ullum aliud vestigium sit, quod solum omne subsedisse indicet, toto eo tempore superficiei maris elatio dimidii, aut integri pedis censeri poterit ubi statuamus scabellum aut mari æstuanti, aut cimbarum lateribus, quæ dimidio circiter pede supra aquam assurgunt, initio par fuisse.

Post illud tempus quæ in toto Mediterraneo mari adjectæ sunt observationes, in littoribus quibuscumque abrasis, protractisque, certam, ac generalem aquarum elevationem undique confirmarunt. Nam in Lucensi portu, & Comacli, & Romæ, atque in littore, & insulis Dalmatiæ deprehensum est ædium veterum pavimenta infra libellam maris consistere: quod in Spalatrensi æde Diocletiani, atque in ædibus aliis Tiberii in Caprensi insula observatorum curiositatem potissimum exercere solet. Huc etiam redeunt observationes quas D. Maillet Alexandriæ, & Carhtagine antea instituerat. Observationum omnium hujusmodi analogia, & ratio etiam limi, saxorumque maris fundo continue advenientium, in maribus undique communicantibus, & jam diu ad mediam æquilibrii libellam compositis, uniformem superficiei totius elationem indicare viderentur. At vero conjecturæ illæ, quas Hartsoekerus ex altitudine, & forma aggerum deprompserat, Baltici etiam, & Germanici maris elationem non satis indicant. In primis enim cum maximi aggeres mari ad boream objecti pedes 14, aut 15 altitudine exæquent, coercendis maximis æstibus præcipue inserviunt, & nunc etiam refluente mari, si exciderent, refici, ac rursus e continenti terra excitari possent. Deinde cum ii aggeres interius saxis grandioribus insistant, satis ostendunt non eo consilio primum (veterum scilicet Romanorum temporibus) extructos fuisse ut multo minori æstuantis maris altitudini pares fierent, nec fuisse postmodum per gradus, & intervalla temporum ad eam, quam habent, molem deductos. Denique quod in aggeribus nonnullis, West-Frisiæ potissimum, crepidines superficiei maris fere ad angulos rectos insistant, id priorum hominum inscitiæ tribuit D. van Bleiswyk in sua de aggeribus dissertatione §. LXXXI. Ipse etiam diligens author cum memoraverit quæ in

in ea regione, quæque in aliis Holandiæ, & Zelandiæ locis, & præcipue in pago *Ter Heyde* ad aggeres reficiendos, muniendosque consilia capta sint, indicavit tamen aggeres intra antiquos altitudinis limites consistere. Quæstionem omnem in priori Harlemensis Academiæ volumine diremit D. Lulofs, cum accuratioribus præteriti, & præsentis sæculi libellationibus, aliisque 166 observationibus inter se collatis copiose ostendit maria Batavorum oras alluentia posterioribus saltem annis 80 se se altius non extulisse. Quibus si addamus Tacitum, Eumenem, Scriptores alios, quos nuper D. Vander Aa litteris humanissime ad me datis recensuit, palustres, adeo, humilesque oras ipsas descripsisse, ut vix amplius nunc temporis dici possit; concludendum erit profecto, quod licet in globi totius primordiis, prioribusque revolutionibus aliæ fuerint marium subsidentium, vel altius assurgentium vicissitudines, ut ex concretionibus terrestribus, stratorumque supra, & infra mediam telluris superficiem dispositione, & indole colligunt Authores varii; maris Batavi tamen, ac Germanici superficies ab aliquot jam sæculis, ut in Mediterraneo mari, se se altius nequaquam extulit.

Singulare phænomenon Celsius Philosophorum examini objecit cum Bononia, atque e Manfredii societate in Sueciam redux, eadem methodo usus, Oceano quidem prope urbem Bahus, mari autem Baltico undequaque ad signa quædam fixa, & stabilia similiter relato, invenit mediam aquæ libellam, posterioribus saltem sæculis, humiliorem quam antea factam esse. Eo enim mari, & sinu præsertim Botnico perlustrato observavit patere scopulos, quibus olim subtus aquas demersis nautæ periclitabantur: quæ olim piscatoria erant loca tam alte modo eminere ut non amplius piscationis commodo inserviat: atque inprimis scopulum quemdam, quo marini canes ad annum usque 1680 abducebantur, anno postmodum 1731 digitis Suecicis $20\frac{1}{2}$ superficie maris altiorem inventum esse. Loca etiam, quæ eodem anno prope urbem Gefle in ipsa maris libella Celsius diligentissime signaverat, annis 1745, & 1746 recognita D. Dalin partibus fere 0.625 pedis unius Suecici elatiora evasisse retulit. Quæ tamen quantitas & nimiam argueret aquarum depressionem, integri scilicet pedis pro singulis annis 24, & ex se adeo exigua est ut difficultati mediæ libellæ maris signandæ tribui aliqua ex parte possit. Minor aquarum omnium depressio colligeretur ex inscriptione quadam prope Aspò in lacu Meler, qui cum Baltico mari communicat, posita, ut putant, quinque ab hinc sæculis, & modo pedibus Suecicis fere 13 supra libellam maris

ris elata. Minorem adhuc depressionem invenit D. Gadolin ex attenta, & multiplici Arcis Abo observatione. Suecicas omnes observationes ab anno usque 1764 mecum per litteras D. Ferner communicaverat, qui omnes postmodum eleganter, ac fuse exposuit in sermone ad Holmiensem Academiam conscripto. Inde tam certo Baltici, & Bothnici inprimis sinus depressio colligitur, ac maris Hadriatici, & Mediterranei totius libellam elevari exploratum sit. Pariter observationes aliae, quae ad boreales oras, extra sinus eosdem institutae sunt, totius etiam Oceani Borealis depressionem aliquam indicare viderentur. Cum itaque per Oresundicum, & Gaditanum fretum communicatio marium libere pateat, & maria libere inter se communicantia ad alicujus curvae continuae formam omnia disponi debeant: cumque insuper sola fundi depletio generalem superficiei totius elevationem, & aquae in terram conversio, ac voluminis imminutio, si quae sit, non nisi exigua esse, nec nisi generalem marium depressionem exhibere possit; in tota physicarum caussarum serie inquirendum est utrum ratio aliqua occurrat, quae ad polos quidem depressionem aliquam ferat mediae libellae, & superficiei marium, in minoribus autem distantiis ab aequatore majorem potius aquarum altitudinem expostulet.

CAPUT PRIMUM.

DE GENERALIBUS VARIATIONIBUS MARIUM, ET TOTIUS TERRAE.

PROBLEMA I.

SI sphaera solida circa aliquam diametrum revolvatur, & data diametro, dataque materiae quantitate varietur densitas in data aliqua ratione distantiae a centro, tota autem momenti quantitas eadem manere debeat, invenire variationem velocitatis.

Si uniformis densitas sphaerae exprimatur unitate, & velocitas rotationis sub aequatore vocetur V, ac radius sphaerae sit R, isque ad peripheriam se habeat ut $1 : p$, juxta Probl. III. Lib. I. erit momentum sphaerae integrae $\frac{4}{15} p R^4 . V$, momentum nuclei sphaerici radio z descripti circa centrum $\frac{4}{15} p z^4 . \frac{Vz}{R}$, & momentum strati sphae-

sphærici altitudinis dz erit $\frac{4}{3}pz^4 . \frac{Vdz}{R}$, æquale scilicet quantitati materiæ $2pz^2dz$ ductæ in velocitatem maximam $\frac{Vz}{R}$, atque in duas tertias partes distantiæ z a centro. Simili modo si densitas in exteriori superficie evadat ω, & v velocitas rotationis sub æquatore, atque in alia quavis distantia z centro sit densitas $\frac{\omega z^n}{R^n}$ velocitas vero $\frac{vz}{R}$, invenietur momentum strati cujusvis sphærici $\frac{4pv\omega z^{n+4}dz}{3R^{n+1}}$, momentum totius nuclei $\frac{4pv\omega z^{n+5}}{3.\overline{n+5}.R^{n+1}}$, momentum sphæræ integræ $\frac{4pv\omega R^4}{3.\overline{n+5}}$: quod si æquari debeat momento $\frac{4}{15}pR^4V$ fiet $\frac{v}{V} = \frac{n+5}{5\omega}$. Jam vero cum in hypothesi eadem variatæ densitatis, in strato quovis materiæ quantitas esse debeat ut volumen strati $2pz^2dz$ ductum in densitatem $\frac{\omega z^n}{R^n}$, erit in nucleo sphærico materiæ quantitas $\frac{2p\omega z^{n+3}}{\overline{n+3}.R^n}$, atque in sphæra integra $\frac{2p\omega R^3}{n+3}$. Cum itaque hæc eadem esse debeat massa $\frac{2}{3}pR^3$ sphæræ uniformiter densæ fiet $\omega = 1 + \frac{1}{3}n$, adeoque etiam $\frac{v}{V} = \frac{3.\overline{5+n}}{5.\overline{3+n}}$, & $\frac{V-v}{V} = \frac{2n}{15+5n}$.

Corollarium.

Primo igitur si exponens n positivus sit, hoc est si densitas accedendo ad centrum minuatur, erit $V > v$, & velocitas rotationis minor erit quam quæ eadem vi imprimi posset sphæræ uniformiter densæ, æqualis massæ, & ejusdem radii. Deinde si exponens

nens n negative accipiatur, & sit $n < 3$, hoc est si varietur densitas in ratione minore quam reciproca triplicata distantiæ, rotationis velocitas augebitur, ac fiet $\frac{v-V}{V} = \frac{2n}{5 \cdot \overline{3-n}}$. Posito autem $n = -3$ fiet $\frac{v-V}{V} = \frac{1}{0}$, & $\alpha = 1 + \frac{1}{3}n = 0$: scilicet materies omnis concipienda erit tamquam si in centrum coalesceret, & velocitas rotationis, quæ data vi excitari posset, maxima evaderet. Contra si n sit quantitas valde exigua censeri poterit $\frac{v-V}{V} = \frac{2}{15}n$, & variatio velocitatis erit ejusdem ordinis.

Problema II.

Si strata singula sphæræ homogeneæ velocitatem datam circa diametrum aliquam conceperint, atque immutata lege densitatis data materiæ quantitas ab extima superficie in locum strati alterius transeat, invenire variationem velocitatis.

Si densitas sphæræ homogeneæ ut antea vocetur 1, & immutata lege densitatis fiat ipsa in superficie sphæræ α, & in distantia qualibet z a centro $\frac{\alpha z^n}{R^n}$, erit densitatis variatio $\frac{\alpha z^n}{R^n} - 1$. Et si rotationis velocitas in æquatore sphæræ homogeneæ vocetur V, atque in distantia z tota velocitas sit $\frac{Vz}{R}$, & differentia velocitatis $V - \frac{Vz}{R}$, perinde erit ac si sphæra omnis circa axem uniformiter revolvens, evanescente ad extimam superficiem data materiæ quantitate, ad distantiam z a centro impellatur quantitate materiæ $\frac{\alpha z^n}{R^n} - 1$, & velocitate $V - \frac{Vz}{R}$. At vero momentum strati, cujus radius sit z, volumen $2pz^2dz$, densitas $\frac{\alpha z^n}{R^n} - 1$, velocitas $V - \frac{Vz}{R}$ eodem quo antea modo invenietur

$$\frac{3}{4}pVdz\left(\frac{\alpha z^{n+3}}{R^n} - \frac{\alpha z^{n+4}}{R^{n+1}} + \frac{z^4}{R} - z^3\right),$$

sum-

summisque acceptis, ac posito $z = R$ fiet summa momentorum omnium hujusmodi in tota sphæra $\frac{4}{3} p V R^4 . \left(\frac{\omega}{\overline{n+4}.\overline{n+5}} - \frac{1}{20} \right)$.

Quod si igitur sit $V - v$ differentia velocitatis, quæ, ob ictus hosce omnes velociorum particularum unicuique strato advenientium, in æquatore sphæræ induceretur, & juxta superius Problema sit $\frac{4}{3.\overline{n+5}} p \omega R^4 . \overline{V - v}$ momentum sphæræ totius, in qua velocitas sub æquatore fiat $V - v$, & lex densitatis $\frac{\omega z^n}{R^n}$; quia per Theor. V. Lib. I. summa momentorum omnium rotationis æquari debet momentis virium impressarum, exæquatis terminis fiet $\omega . \frac{V - v}{V} = \frac{1}{n+4} - \left(\frac{n+5}{20 \omega} \right)$: atque, ob æqualem semper materiæ quantitatem, posito ut antea $\omega = \frac{n+3}{3}$, eruetur denique

$$\frac{V - v}{V} = \frac{-7n - 3n^2}{20.\overline{n+3}.\overline{n+4}}.$$

Corollarium.

Quod si igitur exponens n satis parvus intelligatur, in primis censeri poterit $\frac{V - v}{V} = \frac{-7n}{20.\overline{12+7n}}$, ac deinde etiam $\frac{V - v}{V} = \frac{-7n}{240}$, & variationes velocitatis in hac hypothesi, & in hypothesi alia problematis antecedentis inter se erunt ut $7:32$. In hac etiam hypothesi, impresso jam rotationis motu, atque addensatis postmodum stratis omnibus inferioribus accessione particularum a superiori strato advenientium, posito utcumque exponente n positivo, aliqua semper habebitur acceleratio rotationis circa datam diametrum conceptæ.

Problema III.

Si stratum aliquod superius sphæræ homogeneæ in locum aliquem inferiorem transeat, invenire variationem velocitatis.

In

In primis si stratum aliquod densitatis ω, altitudinis ϖ, & quantitatis materiæ $2pR^2\omega\varpi$ ab extima superficie demptum ad distantiam z a centro immediate transferri intelligatur, incurret in sphæram omnem velocitate $V - \frac{Vz}{R}$, & momento $\frac{4}{3}pR^2\omega\varpi z.\frac{\overline{R-z}.V}{R}$. Hoc autem momentum, si inducat variationem velocitatis $v - V$ sub æquatore, exæquari debebit momento sphæræ homogeneæ $\frac{4}{15}pR^4.\overline{v-V}$, addito momento $\frac{4}{3}pR^2\omega\varpi z^2.\frac{\overline{v-V}}{R}$ strati ejusdem dempti exterius, adjectique ad distantiam z. Exæquatis igitur terminis eruetur

$$\frac{v-V}{V} = 5\omega\varpi.\frac{Rz - z^2}{R^3 + 5\omega\varpi z^2}.$$

Deinde vero si stratum idem $2pR^2\omega\varpi$ ab eadem superficie demptum gradatim descendendo a distantia $y + dy$ ad distantiam y a centro transire incipiat, erit $\frac{Vdy}{R}$ differentia velocitatis, qua incipiet sphæram omnem urgere, & momentum velocitatis erit $\frac{4}{3}pR\omega\varpi V.ydy$. Ita igitur acceptis summis ut in extima superficie evanescant, ad distantiam quamcumque z fiet omne momentum ictus $\frac{2}{3}pR\omega\varpi V.\overline{R^2 - z^2}$: atque inde simili modo eruetur

$$\frac{v-V}{V} = 5\omega\varpi.\frac{R^2 - z^2}{2R^3 + 10\omega\varpi z^2}.$$

COROLLARIUM I.

Variationes velocitatis in binis hisce hypothesibus inter se erunt ut $2Rz - 2z^2 : R^2 - z^2 = 2z : R + z$, sive ut differentia ad semisummam duarum distantiarum strati propositi a centro. Et cum altitudo strati satis parva debeat intelligi ut differentia velocitatis per totam ipsius crassitiem negligatur, erit in priori hypothesi $\frac{v-V}{V} = 5\omega\varpi.\frac{Rz - z^2}{R^3}$, inde secunda vero $\frac{v-V}{V} = 5\omega\varpi.\frac{R^2 - z^2}{2R^3}$:

in

in utroque autem casu data quavis materiæ quantitate a locis superioribus labente ad inferiora rotationis motus aliqua semper ratione accelerabitur.

COROLLARIUM II.

Si requiratur ad quam usque distantiam dejici debeat stratum propositum ut fiat velocitatis variatio $\frac{v - V}{V} = \frac{a}{2R}$, in priori hypothesi ordinatis terminis, & extracta radice fiet $z = \frac{1}{2} R . \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2}{5a}}\right)$: in altera vero $z = R . \sqrt{\left(1 - \frac{1}{5a}\right)}$. Et si fiat insuper $a = 1$, hoc est si strati ad distantiam z dejecti densitas exæquet sphæræ homogeneæ densitatem, & sphæra evadat duplo ibidem densior, in priori quidem casu strati immediate transpositi erit $z = 0.887 R$, atque in casu altero strati gradatim descendentis $z = 0.9 R$ quam proxime.

COROLLARIUM III.

Generatim itaque solida corpora ponderosiora a superficie Terræ, atque a stratis superioribus ad inferiora centrum versus labendo diurnum motum aliqua semper ratione accelerabunt: cumque alia ejusdem generis corpora gradatim altius nequant assurgere, quæ vero fluida aut compressione totius Terræ, aut accumulatione materiæ in fundo maris, ad altiorem libellam se se componere intelligantur, velocitatis diurnæ defectu excurrendo primum ad littora occidentalia, ac deinde ad orientalia refluendo, atque ictus hosce reciprocos continuando quousque ad æquilibrium redeant, diurnum motum nequeant afficere; interiores totius globi vicissitudines non nisi ad augendam diurni motus velocitatem conferre poterunt.

PROBLEMA IV.

Si sphæra omnis ad datam usque a centro distantiam subsidat, comprimaturque, invenire variationem velocitatis, qua circa eamdem diametrum rotari perget.

Sit radius sphæræ R, radius nuclei invariabilis r, differentia utriusque a, eaque ad altitudinem b ita reduci intelligatur ut radius strati cujuslibet intermedii $r + x$ subsidendo fiat $r + \frac{bx}{a}$. Sit

etiam prior velocitas ſub æquatore ad diſtantiam R a centro $= \mathrm{V}$, ad diſtantiam $r + x = \left(\frac{r+x}{r+a}\right)\mathrm{V}$, ad diſtantiam $r + \frac{bx}{a} = \left(\frac{r+\frac{bx}{a}}{r+a}\right)\mathrm{V}$, & differentia utriuſque ſit $\frac{a-b}{r+a} \cdot \frac{x}{a} \cdot \mathrm{V}$. Hæc eadem erit velocitas, qua ſtratum quodlibet $2p.(r+x)^2.dx$ a diſtantia $r+x$ a centro ad diſtantiam $r + \frac{bx}{a}$ deveniendo ſphæram omnem urgebit: atque erit momentum ictus

$$2p(r+x)^2.dx.\frac{2}{3}\left(r+\frac{bx}{a}\right).\frac{a-b}{r+a}.\frac{x}{a}.\mathrm{V}:$$

acceptiſque de more ſummis, & a pro x ſubſtituta, evadet momentum ſtratorum omnium

$$\frac{4}{3}p.\frac{a-b}{r+a}.\mathrm{V}.\left(\frac{1}{2}r^3a+\frac{2}{3}r^2a^2+\frac{1}{4}ra^3+\frac{1}{3}br^2a+\frac{1}{2}bra^2+\frac{1}{5}ba^3\right):$$

ac denique ſi $a-b$ ſit adeo exigua ut poſſit negligi ipſius productum in differentias alias altitudinum a, & b, fiet momentum omne

$$\frac{4}{3}pa\mathrm{V}.\frac{a-b}{r+a}.\left(\frac{1}{2}r^3+r^2a+\frac{3}{4}ra^2+\frac{1}{5}a^3\right).$$

Hoc autem momentum cum exæquari debeat momento ſphæræ $\frac{4}{15}p\left(r+b\right)^4.\overline{v-\mathrm{V}}$, neglectis pariter differentiis momentorum, quæ ex differentiis denſitatis in ſphæra ipſa ad modicam altitudinem compreſſa oriri poſſunt, & loco $r+a$, ſive etiam loco $r+b$ ſcribendo R, ac deinde poſito $a = \mathrm{R} - r$, eruetur

$$\frac{v-\mathrm{V}}{\mathrm{V}} = 5a.\frac{a-b}{\mathrm{R}^5}.\left(\frac{1}{2}r^3+r^2a+\frac{3}{4}ra^2+\frac{1}{5}a^3\right)$$

$$= a.\frac{a-b}{\mathrm{R}^5}.\left(\mathrm{R}^2.\overline{\mathrm{R}+\frac{3}{4}r}+\frac{1}{2}r^2.\overline{\mathrm{R}+\frac{1}{2}r}\right).$$

Corollarium I.

Si ſphæram omnem intelligamus eadem lege in ſtratis ſingulis comprimi ad centrum uſque, & in priori æquatione fiat $\mathrm{R} = a$, & $r = 0$, prodibit $\frac{v-\mathrm{V}}{\mathrm{V}} = \frac{\mathrm{R}-b}{\mathrm{R}}$: quod ex ſe etiam manife-

ſtum

ſtum eſt. Ubi enim ſingula ſphæræ ſtrata coarctentur, atque in data ſemper ratione propius accedant centro, manente in particulis omnibus abſoluta rotationis velocitate, atque ob proportionalitatem diſtantiarum motibus ſe ſe invicem non impedientibus, angularis velocitas augebitur in ratione inverſa radiorum.

Corollarium II.

Quod ſi e contra ſtatuamus ſphæram ab extima ſuperficie ad eam uſque altitudinem comprimi, quæ præ toto ſphæræ radio exigua ſit, atque in poſteriori æquatione ſtatui poſſit $R = r$, evadet $\frac{v - V}{V} = 5\,a.\frac{a - b}{2\,R^2}$. Ut igitur in caſu aliquo eſſe poſſit $\frac{v - V}{V} = \frac{a - b}{2\,R}$ ſtatuere oportet $a = \frac{1}{5}\,R$: atque univerſim inveniri poterit qua quantitate, & ad quam uſque altitudinem comprimi debeat ſphæra, ut binis hypotheſibus compoſitis habeatur data rotatorii motus acceleratio.

Corollarium III.

In hoc igitur caſu, & in caſibus aliis problematum antecedentium cum rotatorius motus in data ratione accelerari, & vis centrifuga augeri debeat in ratione eadem duplicata; in ipſis caſibus præcedentibus ob datum ſphæræ radium, atque ob eamdem materiæ quantitatem in ſtratis ſphæricis diſpoſitam, gravitas in extima ſuperficie manebit eadem: in poſteriori autem hoc caſu gravitas erit in ratione inverſa duplicata radii, ſcilicet cum vis centrifuga augeatur in ratione $1 + 5\,a.\frac{a - b}{R^2} : 1$, gravitas etiam augebitur in ratione $1 + 2.\frac{a - b}{R} : 1$.

Problema V.

Data acceleratione motus, & data ratione vis centrifugæ ad gravitatem variationes altitudinum fluidi ſphæræ homogeneæ circumpoſiti definire.

In primis ſi ſphærois fluida ſemiaxibus $C + B$, & C deſcripta circa minorem axem revolvatur, & vis centrifuga præ gravitate exigua ſit, atque ad gravitatem ipſam ſe habeat ſub æquatore ut $1 : g$, & ſit $\frac{B}{C + B} = \frac{5}{4g}$, erit fluidum omne in æquilibrio. Deinde ſi inte-

 rius

rius sphæroidem omnem durescere intelligamus, neque attractio, neque æquilibrium fluidi exterius superstitis turbari poterit, eademque adhuc manebit forma si sphæra solida fluido homogeneo ad modicam altitudinem circumambiatur. Insuper si sit R radius sphæræ, in quam secluso motu rotationis abiret fluidum, & sphæræ soliditas $\frac{2}{3}pR^3$ æquari debeat sphæroidis soliditati $\frac{2}{3}pC^2.\overline{C+2B}$, fiet $R = C + \frac{2}{3}B$, atque abeunte in oblatam sphæroidem sphæra duplo magis ad polos deprimetur fluidum, quam assurgat sub æquatore: & si s ut antea sit sinus distantiæ a polis, & fiat sphæroidis semidiameter $C + B . s^2 = R = C + \frac{2}{3}B$, posito $s^2 = \frac{2}{3}$, locus invariatæ altitudinis distabit 54° 44' a polis, & 35° 16' ab æquatore. Quod cum pro quavis sphæroide valeat, quæ accedat proxime ad sphæram, ubi aucta rotationis velocitate ratio vis centrifugæ ad gravitatem $\frac{1}{g}$ fiat $\frac{1}{g^1}$, erit variatio differentiæ semiaxium $\frac{5}{4}.\overline{\frac{1}{g^1} - \frac{1}{g}}$, & cum in toto priori tractu fluidum adhuc deprimi, & in secundo altius debeat assurgere, erit depressio omnis sub polis $\frac{5}{6}.\overline{\frac{1}{g^1} - \frac{1}{g}}$, & elevatio sub æquatore $\frac{5}{12}.\overline{\frac{1}{g^1} - \frac{1}{g}}$.

COROLLARIUM I.

Ubi statuamus differentiam semiaxium Terræ integra hexapeda augeri, deprimentur maria pedibus quatuor sub polis, & duobus pedibus excrescent sub æquatore. In latitudine autem 45°, quæ medio Mediterraneo mari respondet, posito $s^2 = \frac{1}{2}$, invariato fundo adhuc depressio integri pedis habebitur. Quod si ob materiam undique in mare advectam, sive ob aliquam terræ totius compressionem intelligamus maris superficiem binis ubique pedibus altiorem evasisse, erit elatio omnis trium pedum sub æquatore, & in mari Mediterraneo unius pedis: in mari Batavo potius depressio aliqua habebitur: in sinu autem Bothnico, atque in latitudine circiter 65° depressio fiet plusquam ped. $1\frac{1}{4}$.

COROLLARIUM II.

Si minor semiaxis Terræ assumatur hexap. 3265909, & variatio

riatio differentiæ semiaxis utriusque sit $\frac{1}{3265909}$, erit

$\frac{1}{g'} - \frac{1}{g} = \frac{4}{5(3265909)}$, atque in hypothesi Probl. II., & III. satis erit ut fiat $\frac{v - V}{V} = \frac{2}{5R}$: in hypothesi vero Probl. IV. debebit esse $\frac{1 + 5a.\frac{a-b}{R^2}}{g(1 + 2.\frac{a-b}{R})} = \frac{4}{5R}$. In priori itaque hypothesi densiorum corporum successive centrum versus labentium ad phænomenon explicandum multo minore terrestris globi variatione erit opus quam si pressione corporum superiorum Terra omnis in minus semper volumen coarctaretur.

COROLLARIUM III.

Cum autem revolutio diurna absolvatur tempore $86164''$, acceptis partibus $\frac{2}{5(3265909)}$ erit $0.636'''$ tempus, quo revolutio eadem corripietur, eritque circiter $3\frac{1}{4}''$, quo annus tropicus ob eamdem caussam videbitur produci: & cum differentia hæc omnis compensari aliqua ex parte debeat ob medii resistentiam, quæ, retardando periodici motus velocitatem, orbem annuum coarctari, & Terram Soli propius sinit accedere, atque tempus revolutionis integræ brevius efficit; in hypothesibus hisce omnibus, quæ sensibilem variationem altitudinis marium exhiberent, nihil jam relinquetur, quod astronomicis observationibus sensibile fieri possit.

SCHOLION.

Ex hoc generali totius Terræ prospectu patet internas omnes vicissitudines non nisi ad accelerandum diurnum motum conducere. Nam in cavernis omnibus, & anfractibus subterraneis ponderosiora corpora, aut demum proprio pondere avulsa, aut aliquando terræ motuum vi excussa, quam primum extraneæ caussæ deficiant, non nisi ad inferiora loca dilabi possunt. Terræ motus autem cum non nisi aliquot minutorum tempore obveniant, quandoque tamen late adeo protenduntur ut referente Ammiano Marcellino totum fere Impe-

pe-

perium Romanum aliquando excusserint, & qui anno 1692 contigit, & qui adhuc Olisiponensis terræmotus nomen retinuit per magnam Europæ partem fuerit sensibilis. Aquis etiam fluentibus devexam telluris superficiem, colles, montesque abradi, atque avulsa inde corpora ad mare, atque in intimos telluris sinus continue ferri undique notum est: utcumque autem materiam e littoribus occidentalibus delata excessu diurnæ velocitatis in profundiores marium aquas incurrere, & retardari intelligamus; supererit tamen quæ ex littoribus orientalibus adveniet, & quæ solida marium latera urgendo diurnum motum aliqua semper ratione accelerabit. D. Buffon Art. XVII. Hist. Nat. generale etiam phænomenon protulit rimarum perpendicularium, quæ in cavernis saxeis, & marmoreis non solum, verum etiam in argilla, & terra non adhuc mota amplissimæ, ac frequentissimæ occurrunt, quæque, cum raro admodum sint obliquæ, successivam aliquam materiæ terrestris compressionem, accelerationemque diurni motus indicare viderentur. Ita vero cum stratis terrestribus undique perlustratis non nisi accelerati motus indicia se se offerant, cumque aut terræ totius solidæ condensatione, aut accumulatione materiæ in fundo maris dejectæ superficiem altius attolli necesse sit, indicavimus quibus aliis hypothesibus singulare phænomenon marium polarium, post vetustissimas globi totius revolutiones, sæculo hoc nostro inferius depressorum explicari possit. Qui e contra integram Scandinaviam supra mare Balticum subterranei ignis vi altius elatam esse censuerunt viri clarissimi, minime consideraront tam ampli tractus, tot urbium, tantorum montium elevationem sine maximo terræmotu, ac diutissimo, cujus vestigium nullum invenimus fieri non potuisse, ac igne postmodum subterraneo aut per apertas telluris rimas, aut in marinis vorticibus exhalante, solum omne inæqualiter subsidere, & alicubi potius disjici oportuisse. Qui vero Oresundicum, & Gaditanum fretum Baltici, & Mediterranei maris veluti amplissimorum fluminum ostia ingeniose, ac subtiliter spectarunt, quibus varie obstructis, aut profundius effossis successu temporis aquarum omnium effluxus in oceanum diversimode pateret, & objecta veluti cataracta diversi generis aquæ ipsæ aut turgescerent, aut ad libellam inferiorem se se componerent, hypothesim protulerunt nec Geographiæ, nec Physicæ satis consonam. Gaditanum enim fretum, ubi est angustius, navibus etiam amplissimis per quinque millia passuum a veteri usque hominum memoria patuit: & qui sectionem freti Oresundici, binorumque aliorum sinuum, quibus intra insulas Daniæ mare Balticum

cum cum Germanico communicat, cum iis omnibus fluminibus comparaverit, quæ ex Germania, & Scandinavia in Balticum decurrunt, facile intelliget neque anteacto tempore plus aquæ inde advenisse quam quæ e Baltico mari in Germanicum effundi poterat, neque unquam duorum marium communicationem ita impeditam fuisse ut ad eamdem libellam mediam se minime composuerint.

CAPUT SECUNDUM.

DE ÆQUILIBRIO FLUIDORUM NUCLEOS SPHÆROIDICOS CIRCUMAMBIENTIUM.

PROBLEMA VI.

DAtis semiaxibus sphæroidis homogeneæ, accedentisque proxime ad sphæram, invenire proportionem vis, quæ ad centrum dirigitur, & vis alterius, quæ perpendicularis est axi ipsius sphæroidis.

In primis si proponatur sphærois revolutione ellipseos ABHD, fig. 38., circa minorem axem DB genita, per Coroll. III. Probl. VI. Lib. II. erit tota attractio sphæroidis in æquatore $A = \frac{2}{3}pC + \frac{2}{5}pB$, &, per Coroll. I. Theor. IV., in puncto quocumque Q erit vis axi DB perpendicularis $= \overline{\frac{2}{3}pC + \frac{2}{5}pB}.\frac{QL}{C+B}$, seu proxime $= \overline{\frac{2}{3}pC - \frac{4}{15}pB}.\frac{QL}{C}$. Erit etiam attractio in polo sphæroidis $D = \frac{2}{3}pC + \frac{8}{15}pB$, & in puncto quocumque Q erit vis perpendicularis plano æquatoris $= \overline{\frac{2}{3}pC + \frac{8}{15}pB}.\frac{QV}{C}$. Quod si igitur pro $\frac{2pC}{3} - \frac{4}{15}pB$ scribamus $\frac{2}{3}pC + \frac{8}{15}pB - \frac{4}{5}pB$, vis $\overline{\frac{2}{3}pC + \frac{8}{15}pB}.\frac{QL}{C}$ secundum QL cum vi $\overline{\frac{2}{3}pC + \frac{8}{15}pB}.\frac{QV}{C}$ se-

cun-

cundum QV componet vim $\overline{\frac{2}{3}pC+\frac{8}{15}pB}\cdot\frac{QO}{C}$ secundum QO, ac supererit vis $-\frac{4}{5}pB\cdot\frac{LQ}{C}$, quæ contraria directione tendet ex L in Q: atque erit vis omnis in centrum O ad vim perpendicularem axi in puncto quocumque Q ut

$\overline{\frac{1}{3}C+\frac{4}{15}B}\cdot QO : -\frac{2}{5}B\cdot LQ$.

Quod si proponatur sphærois revolutione ellipseos ejusdem circa majorem axem AH genita, juxta corollarium Probl. V. Lib. II. erit attractio in puncto Q secundum QL exercita $= \overline{\frac{2}{3}pC+\frac{2}{15}pB}\cdot\frac{QL}{C+B} = \overline{\frac{2}{3}pC-\frac{8}{15}pB}\cdot\frac{QL}{C}$, & per Coroll. V. Probl. VI. erit attractio secundum QV exercita $\overline{\frac{2}{3}pC+\frac{4}{15}pB}\cdot\frac{QV}{C}$. Quod si igitur pro vi priori, quæ dirigitur ex Q in L, scribamus $\overline{\frac{2}{3}pC+\frac{4}{15}pB}\cdot\frac{QL}{C}-\frac{4}{5}pB\cdot\frac{QL}{C}$, patebit similiter vim omnem tradentem in centrum O se habere ad vim, quæ secundum QL supererit, ut

$\overline{\frac{1}{3}C+\frac{4}{15}B}\cdot QO : \frac{2}{5}B\cdot LQ$.

Quod si etiam proponeretur sphærois oblonga, in qua revolutionis axis esset C, & æquatoris radius C—B, atque ita manentibus omnibus ut in priori casu fieret B negativa, per Coroll. III. Probl. VI. erit attractio in puncto Q secundum QV exercita $= \overline{\frac{2}{3}pC-\frac{8}{15}pB}\cdot\frac{QV}{C}$, & attractio secundum LQ erit

$= \overline{\frac{2}{3}pC-\frac{2}{5}pB}\cdot\frac{QL}{C-B} = \overline{\frac{2}{3}pC-\frac{8}{15}pB}\cdot\frac{QL}{C}+\frac{4}{5}pB\cdot\frac{QL}{C}$,

& adhuc vires secundum QO, & QL agentes inter se erunt ut

$\overline{\frac{1}{3}C-\frac{4}{15}B}\cdot QO : \frac{2}{5}B\cdot LQ$.

Co-

Corollarium I.

Si more ſolito inſtituatur diviſio, atque ob exiguam differentiam rectarum AO, QO, DO negligantur producta inferiorum ordinum, vis omnis ad centrum tendens in ſphæroide oblata, atque oblonga erit ad vim, quæ perpendiculariter ad axem DB ſupererit, ut $5QO : \frac{6B}{C}.LQ$, ſeu proxime ut $1 : \frac{6B}{5C^2}.LQ$, & in ſphæroide oblata, atque oblonga, quæ iiſdem ſemiaxibus majore AO, & minore DO ſit deſcripta, eadem directione tendet ex L in Q: in oblonga autem ſphæroide, cujus ſemiaxis major ſit DO, e contra dirigetur ex Q in L. Si punctum Q aſſumatur tam proximum puncto A, ut inſuper poſſit negligi productum differentiæ ſemiaxium B in differentiam rectarum QL, QO, fiet virium earumdem ratio $1 : \frac{6B}{5C}$.

Corollarium II.

Poſitis aliis denominationibus Probl. VI. Lib. II. ſi generatim ſit $\frac{2p}{3a^2}.(C^3 + 2C^2B) + \frac{4pC^4B}{5a^4}.(1 - 3T^2)$ vis omnis, quæ ad oblatæ ſphæroidis centrum dirigitur, & ſit propterea $\frac{2p}{3a^2}(C^3 + 2C^2B)$ vis illa, quam eadem materiæ quantitas ſecundum QO exerceret ſi tota in ſphæram conformaretur, & $\frac{2pC^4B}{5a^4}.(1 - 3T^2)$ vis alia, quæ ex forma ſphæroidis oritur, quæque prope æquatorem, poſito $T^2 = 0$, & $a = C$, fit $\frac{2}{5}pB$; erit $\frac{6B}{5C}.\frac{2}{3}p.\overline{C + 2B}$, ſeu proxime $\frac{4}{5}pB$ vis, quæ ob formam ipſam ſphæroidis ſecundum LQ ſupererit: ſcilicet vis hujuſmodi poſterior præcedentis dupla erit.

Corollarium III.

Patet autem quod ſi angulus AOQ, & ſinus T deviationis ab æquatore maneat ſatis exiguus, & ſphærois accedat proxime ad ſphæram, recedendo directe a centro vis utraque, & quæ ſecundum

QO, & quæ secundum LQ superest præter vim $\frac{2p}{3a^3}(C^3 + 2C^2B)$, imminui debet in eadem ratione quam proxime. Quare cum vis centralis ea portio, quæ ex figura sphæroidica ortum ducit, prope æquatoris planum, in qualibet a centro distantia, sit $\frac{2pC^4B}{5a^4}$, erit vis perpendicularis minori axi sphæroidis $\frac{4pC^4B}{5a^4}$, & quæ inde orietur vis perpendicularis rectæ a loco dato prope æquatorem ad centrum ductæ erit quam proxime $\frac{4pC^4B.T}{5a^4}$, quemadmodum in Probl. V. Lib. III. prioris Cosmographiæ partis antea assumpsimus.

THEOREMA I.

Si sphæra solida, & homogenea *abhd*, fig. 38., fluido aliquo diversæ densitatis ad modicam altitudinem circumambiatur, revolvaturque circa axem DB, & vis centrifuga præ gravitate sit valde exigua, æquilibrium totius fluidi sub alicujus sphæroidis forma tueri poterit.

Statuamus fluidum omne ad oblatæ sphæroidis formam se se componere, ac fiat ut antea sphæroidis semiaxis minor $DO = C$, major $AO = C + B$: & cum sit ex conicis $AO^2 : AO^2 - DO^2 = VO : OR$, fiat etiam OR quam proxime $= \frac{2B.QL}{C}$. Si vis omnis, quæ juxta QO dirigitur, in sectionibus omnibus per axem DB traductis sit ad vim aliam, quæ superest juxta QT ut $QO : OR$, seu proxime ut $C^2 : 2B.QL$, completo parallelogrammo QTRO, vis ex binis composita secundum QR sectioni cuilibet ABHD normalem dirigetur, eritque totum fluidum in æquilibrio. Jam vero attractrices vires homogeneæ sphæroidis semiaxibus AO, DO descriptæ, secundum QO, QT esse debent ut $1 : \frac{6B.QL}{5C^2}$: & si radius sphæræ *abhd* vocetur *c*, densitatesque fluidi circumpositi, & sphæræ inclusæ sint inter se ut $1 : 1 + \Delta$, atque in data a centro distantia QO augeatur sphæræ homogeneæ attractio in ratione auctæ quantitatis materiæ, sive in ratione $C^3 + \Delta c^3 : C^3$; erit ratio virium juxta QO, & QT attrahentium $1 + \frac{\Delta c^3}{C^3} : \frac{6B.QL}{5C^2}$.

De-

Denique si tota sphærois circa axem DB volvatur, & gravitas ad vim centrifugam sub æquatore se habeat ut $g : 1$, & vis centrifuga præ gravitate exigua sit, ac sit ubique proportionalis distantiæ ab axe; erit in loco quocumque Q vis omnis secundum QO exercita ad vim omnem, quæ secundum QO supererit, ut

$$1 + \frac{\Delta c^2}{C^2} : \frac{6B.QL}{5C^2} + \left(1 + \frac{\Delta c^2}{C^2}\right) . \frac{QL}{g.C}$$. Quod si igitur ratio

hujusmodi cum alia congruat $C^2 : 2B.QL$, extremis, ac mediis in se ductis fiet $2B.(C^2 + \Delta c^2) = \frac{6}{5}B.C^2 + \frac{C}{g}.(C^2 + \Delta c^2)$,

atque inde eruetur $\frac{B}{C} = \frac{1}{2g} . \frac{C^2 + \Delta c^2}{\frac{2}{5}C^2 + \Delta c^2}$: scilicet totum fluidum erit in æquilibrio si differentia semiaxium ad minorem semiaxem sphæroidis oblatæ se habeat ut $C^2 + \Delta c^2 : g.(\frac{4}{5}C^2 + 2\Delta c^2)$.

COROLLARIUM I.

Si differentia semiaxium B negativo signo exprimatur, oblata sphærois vertetur in oblongam semiaxibus C, & C — B descriptam: atque ita pro casu æquilibrii universim erit

$$\frac{B}{C} = \pm \frac{5}{4g} . \frac{1 + \frac{\Delta c^2}{C^2}}{1 + \frac{5\Delta c^2}{2C^2}}$$. Scilicet data ratione densitatum, & radio

sphæræ inclusæ, universim differentia semiaxium fluidi augebitur in eadem ratione vis centrifugæ: data autem vi centrifuga semper eadem erit semiaxium differentia si differentia densitatum augeatur in ratione reciproca triplicata radii sphæræ inclusæ, sive si in sphæra inclusa materiæ quantitas eadem maneat.

COROLLARIUM II.

Si in casu oblatæ, aut oblongæ sphæroidis iisdem semiaxibus descriptæ fiat $C = c$, in casu vero sphæroidis oblongæ, quæ semiaxes habeat C, & C — B, si fiat $C - B = c$, negliganturque producta differentiæ B in rationem vis centrifugæ ad gravitatem,

 fiet

fiet $\frac{B}{C} = \frac{1}{2g} \cdot \frac{1+\Delta}{\frac{2}{5}+\Delta}$, & sphærois oblata, aut oblonga habebitur prout quantitas $\frac{1+\Delta}{\frac{2}{5}+\Delta}$ positivum, aut negativum valorem obtinebit. Quod si densitas tota sphæræ interioris vocetur ω, & sit $\Delta = \omega - 1$, erit etiam $\frac{B}{C} = \frac{1}{2g} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{5\omega}}$. Data igitur gravitate, & vi centrifuga, semiaxium differentia non erit densitati fluidi, aut sphæræ directe, aut reciproce proportionalis.

Corollarium III.

Si sit $5\omega < 3$, quantitas $1-\frac{3}{5\omega}$, & differentia semiaxium B negativa erit, & si fluidum sphæræ affusum, cum rotationis motus imprimitur, sphæroidis ad polos oblongatæ figuram habeat, continuato motu ab eadem figura minime recedet. Generatim vero imminuta quantitate $1-\frac{3}{5\omega}$, cum ω propius accedet ad $\frac{3}{5}$, & Δ ad $-\frac{2}{5}$ augebitur differentia semiaxium. At cum calculus omnis processerit in hypothesi exiguæ differentiæ, & sphæroidis accedentis proxime ad sphæram, extra formulæ casum erunt absurda omnia, quæ in hypothesi differentiæ ultra datos limites auctæ inde colligi viderentur: ut quod si nuclei densitas ad fluidi densitatem se habeat ut 3:5, lentissimo etiam impresso circulari motu fluidum circa æquatorem altius assurgendo ultra quoscumque limites debeat excurrere.

Theorema II.

Si fluidum nucleo sphæroidico interius homogeneo ad modicam altitudinem affundatur, revolvaturque simul circa axem, adhuc exterius ad alicujus sphæroidis formam se se componet.

Si minor semiaxis in utraque sphæroide interiore, atque exteriore vocetur C, ac differentia semiaxium in nucleo quidem solido vocetur b, B vero in toto fluido circumposito, & differentia densitatum adhuc sit Δ; perinde attrahetur punctum quodcumque Q, ac si sphæroidi densitatis 1, ac semiaxium C, C + B interius adde-

adderetur ſphærois alia denſitatis Δ, & ſemiaxium C, $C+B$. Erit igitur attractio in centrum ad eam attractionis partem, quæ perpendiculariter axi DB ſupererit ut $1+\Delta : \frac{6}{5}\cdot\overline{B+\Delta b}\cdot\frac{QL}{C^2}$: & ſi ſphærois revolvatur circa axem ipſum, & tota gravitas ſub æquatore ſe habeat ad vim centrifugam ut $g:1$, & in ſphæroide oblata vis perpendicularis axi eamdem vis centrifugæ directionem habeat, contrariam vero in oblonga; utrobique æquilibrium circumfuſi fluidi haberi poterit ſi fiat

$$1+\Delta : \frac{6}{5}\cdot\overline{B+\Delta b}\cdot\frac{QL}{C^2} \pm \overline{1+\Delta}\cdot\frac{QL}{g\cdot C} = C^2 : 2B\cdot QL.$$

Inde autem eruetur $\frac{B}{C} = \pm\frac{1}{2g}\cdot\frac{1+\Delta}{\frac{2}{5}+\Delta} + \frac{\frac{3}{5}\Delta b}{\frac{2}{5}C+\Delta C}$: & cum neglectis minoribus fractionibus cenſeri poſſit $\frac{B}{C} = \frac{B}{C-B}$, eadem formula oblongæ & jam ſphæroidi inſerviet, cujus ſemiaxis major ſit C, minor vero ſemiaxis in ſphæroide ipſa, & in nucleo interiore $C-B$. Quare ſi fiat ut antea $\Delta = \omega - 1$, erit pro caſu quolibet poſitivæ, aut negativæ differentiæ ſemiaxium

$$\frac{B}{C} = \frac{1}{2g}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{5\omega}} + \frac{3b}{5C}\cdot\frac{1-\frac{1}{\omega}}{1-\frac{3}{5\omega}}.$$

COROLLARIUM I.

Si differentiæ B, & b exiguæ ſint, ac b ſit poſitiva, differentia etiam B poſitiva eſſe poterit, ſi quantitates $\frac{1}{2g}+\frac{3b}{5C}\cdot 1-\frac{1}{\omega}$, & $1-\frac{3}{5\omega}$ aut ſimul poſitivæ, aut ſimul negativæ fuerint, hoc eſt ſi ſimul fuerit $\frac{1}{2g} > \frac{3b}{5C}\cdot\overline{\frac{1}{\omega}-1}$, & $\omega > \frac{3}{5}$, aut ſimul fuerit $\omega < \frac{3}{5}$, & $\frac{1}{2g} < \frac{3b}{5C}\cdot\overline{\frac{1}{\omega}-1}$. Quod ſi etiam differentia b poſiti-

sitivum valorem habeat, differentia B fiet negativa, & fluidum oblatæ sphæroidi affusum sphæroidis oblongæ formam tueri poterit si alterutra ex binis iis quantitatibus negativa fuerit, si scilicet posito $\frac{1}{2g} < \frac{3b}{5C} \cdot \overline{\frac{1}{\omega} - 1}$ fuerit $\omega > \frac{3}{5}$, aut posito $\omega < \frac{3}{5}$ fuerit $\frac{1}{2g} > \frac{3b}{5C} \cdot \overline{\frac{1}{\omega} - 1}$.

Corollarium II.

At vero in motu circulari vis centrifuga æqualis est quadrato velocitatis per radium circuli diviso: & in motu uniformiter accelerato quadratum velocitatis æquatur constanti vi acceleratrici ductæ in duplum spatium percursum. Itaque erit $\frac{1}{2g} > \frac{3b}{5C} \cdot \overline{\frac{1}{\omega} - 1}$, seu vis centrifuga major erit quam $\frac{6gb}{5C} \cdot \overline{\frac{1}{\omega} - 1}$, si rotationis velocitas major fuerit quam quæ acquiri posset eadem vi acceleratrice g cadendo per altitudinem $\frac{3b}{5} \cdot \overline{\frac{1}{\omega} - 1}$: fluidum scilicet nucleo oblato affusum sphæroidis oblongæ formam tueri poterit si cum velocitas rotationis major fuerit, quam modo diximus, nuclei densitas tribus quintis partibus minor fuerit densitate fluidi, aut viceversa.

Corollarium III.

Pariter fluidum nucleo oblongo affusum oblatæ alterius sphæroidis formam habere poterit, si cum negativa sit differentia b, fuerint etiam aut simul positivæ, aut simul negativæ quantitates $\frac{1}{2g} - \frac{3b}{5C} \cdot \overline{1 - \frac{1}{\omega}}$, & $1 - \frac{3}{5\omega}$: si scilicet rotationis velocitas major fuerit quam quæ acquiri posset cadendo per altitudinem $\frac{3b}{5} \cdot \overline{1 - \frac{1}{\omega}}$, & nuclei densitas major fuerit tribus quintis partibus densitatis fluidi, aut si & nuclei densitas, & velocitas rotationis simul ab indicatis quantitatibus deficiant. Si fuerit $\omega = \frac{3}{5}$, & $\frac{1}{2g} \pm \frac{3b}{5C} \cdot \overline{1 - \frac{1}{\omega}} = 0$,

figu-

figura cujuslibet sphæroidis, quæ accedat proxime ad circulum, retinendo æquilibrio inserviet.

COROLLARIUM IV.

Generatim vero pro æquilibrii casu vis perpendicularis axi se habebit ad gravitatem ut $\frac{6}{5C}.(B+b.\overline{\omega-1}) \pm \frac{\omega}{g} : \omega.\frac{C}{QL} = 2B : \frac{C^2}{QL}$, & in sphæroide oblata vis perpendicularis eamdem habebit directionem vis centrifugæ, contrariam vero in oblonga. Quod si igitur oblata sphærois ab æquilibrii casu abducta magis comprimi incipiat, & differentia semiaxium B augeatur quantitate exigua b', interim autem vis perpendicularis minuatur; singulæ fluidi particulæ ad axem accedent propius, & prior æquilibri forma restituetur. Tum autem erit

$$\frac{6}{5}.(B+b'+b.\overline{\omega-1})+\frac{C\omega}{g} : 2B+2b' < \omega : 1,$$

subductisque terminis analogiæ antecedentis fiet $\frac{6}{5}b' < 2\omega b'$, sive $\omega > \frac{3}{5}$.

COROLLARIUM V.

Idipsum erit si oblata sphærois ab æquilibrii statu recedendo oblongari ad polos incipiat, & vis perpendicularis axi augeatur, ac sit

$$\frac{6}{5}.(B-b'+b.\overline{\omega-1})+\frac{C\omega}{g} : 2B-2b' > \omega : 1.$$

Rursus enim prodibit $\omega > \frac{3}{5}$, auctaque vi perpendiculari singulæ fluidi particulæ ab axe longius recedent quousque pristinam æquilibrii formam restituant. Id in sphæroide etiam oblonga habebit locum: nam si differentia semiaxium $-B$ fiat $-B-b'$, vel $-B+b'$, ad æquilibrium restituendum necesse erit ut vis perpendicularis, quæ axem versus dirigitur, augeatur in primo casu, minuaturque in casu altero: quod esse nequit nisi in utroque casu sit $\omega > \frac{3}{5}$.

COROLLARIUM VI.

Cum itaque in hypothesi quavis nuclei oblati, aut oblongi exterius fluidum sub oblongæ, & oblatæ sphæroidis forma æquilibrari possit, ut modo vidimus, sive posito $\omega > \frac{3}{5}$, sive etiam $\omega < \frac{3}{5}$; in priori casu turbatum utcumque æquilibrium restituetur:

tur: in casu autem altero aucta, vel imminuta differentia semiaxium, in sphæroide quidem oblata augebitur eodem ordine, vel imminuetur vis perpendicularis axi, in oblonga autem minuetur e contra, vel augebitur, & fluidum utrobique magis semper, magisque recedet ab æquilibrio. Posito $n = \frac{1}{3}$ eadem semper maneret ratio vis perpendicularis ad gravitatem, & æquilibrium sub quavis sphæroidis forma haberi posset. At nisi simul sit $\frac{1}{2g} \pm \frac{3b}{5C} \cdot \overline{1 - \frac{1}{n}} = 0$, posito $1 - \frac{3}{5n} = 0$ differentia semiaxium ultra quoscumque limites, & extra casus formularum omnium præcedentium augeretur.

Theorema III.

Si particulæ omnes fluidi nucleo sphærico, vel sphæroidico ad modicam altitudinem affusi attrahantur a corpore alio satis dissito, fluidum omne sphæroidis oblongæ figuram induet, cujus major axis ad idem corpus dirigetur.

In primis enim si fluidum nucleo æque denso circumfusum ad oblongæ sphæroidis ABHD formam se ie componat, & sint sphæroidis semiaxes C + B, & C, juxta Probl. I. in puncto quocumque Q attractrices vires, & quæ ex Q in O, & quæ ex Q in T dirigentur inter se erunt ut $\frac{2}{3}pC + \frac{4}{15}pB : \frac{4}{5}pB \cdot \frac{LQ}{C}$, seu proxime ut $1 : \frac{6}{5}B \cdot \frac{LQ}{C^2}$. Quod si ipse etiam nucleus sphæroidis figuram referat semiaxibus $C + b$, & C descriptæ, & fluidi, ac nuclei densitates sint inter se ut $1 : 1 + \Delta$, juxta Theor. II., fiet ratio earumdem virium $1 + \Delta : \frac{6}{5} \cdot \overline{B + \Delta b} \cdot \frac{LQ}{C^2}$. Denique si fluidum omne attrahatur a corpore alio satis dissito, quod in productione majoris axis AH sit positum, atque ut in Probl. I. Lib. III. vis omnis, qua punctum quodcumque Q distrahitur a plano perpendiculariter ad AO traducto per centrum O, proportionalis sit triplæ distantiæ a plano ipso, atque ad distantiam 1 vocetur P, sit autem g absoluta particulæ cujusque gravitas in D, vel A; neglectis minoribus fractionibus erit in puncto eodem Q absoluta vis, quæ ex at-

attractione corporis longinqui orietur $\overline{1+\Delta}.\mathrm{P}.\frac{\mathrm{LQ}}{g.\mathrm{C}}$. Erit autem vis hujusmodi $\overline{1+\Delta}.3\,\mathrm{P}.\frac{\mathrm{LQ}}{g.\mathrm{C}}$ si loco P eadem accipiatur quantitas quæ in Probl. VII. Lib. II. Æquilibrium itaque totius fluidi haberi poterit si fiat

$$1+\Delta:\tfrac{6}{5}.\overline{\mathrm{B}+\Delta b}.\frac{\mathrm{LQ}}{\mathrm{C}^2}+\overline{1+\Delta}.3\,\mathrm{P}.\frac{\mathrm{LQ}}{g.\mathrm{C}}=\mathrm{C}:2\,\mathrm{B}.\frac{\mathrm{LQ}}{\mathrm{C}}.$$

Inde autem, factis iisdem substitutionibus quæ antea, eruetur

$$\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}}=\frac{3\,\mathrm{P}}{2g}.\frac{1+\Delta}{\frac{2}{5}+\Delta}+\frac{\frac{3}{5}\Delta b}{\frac{2}{5}\mathrm{C}+\Delta\mathrm{C}}=\frac{3\mathrm{P}}{2g}.\frac{1}{1-\frac{3}{5\omega}}+\frac{3b}{5\mathrm{C}}.\frac{1-\frac{1}{\omega}}{1-\frac{3}{5\omega}}.$$

Corollarium I.

Si differentia semiaxium fluidi, & nuclei exiguæ sint, & nucleus solidus oblongæ sphæroidis figuram habeat, fluidum omne figuram oblatæ alterius sphæroidis referre poterit, cujus minor axis ad corpus illud longinquum dirigatur, si quantitas $1-\frac{3}{5\omega}$ negativa sit, hoc est si nuclei densitas minor fuerit tribus quintis partibus densitatis fluidi circumpositi. Generatim etiam æquatio, quæ fluidi ipsius formam determinat, evolvi, & variæ densitatis hypotheses pro casu longinqui corporis attrahentis expendi poterunt ut in corollariis superioribus pro casu particularum omnium circa axem aliquem rotantium jam factum est. Hic autem omissis aliis hypothesibus præstabit illas dumtaxat, quæ in natura habent locum, examinare.

Corollarium II.

Si negligatur differentia semiaxium, quæ ex motu diurno oritur, & solidus telluris nucleus censeatur sphæricus, mare, & atmosphæra telluri affusa, Solis, aut Lunæ actione sphæroidis oblongæ figuram induet, cujus major axis ad Solem, aut Lunam dirigetur, atque universim erit differentia semiaxium

$=\frac{3\,\mathrm{P}}{g}.\frac{1+\Delta}{\frac{4}{5}+2\Delta}=\frac{3\,\mathrm{P}}{2g}.\frac{1}{1-\frac{3}{5\omega}}$. Quod si igitur, ut in Coroll. I.

 Pro-

Probl. IX. Lib. II. interior nucleus plusquam quinta sui parte statuatur densior terra exteriore, & maribus circumfusis, scilicet si sit $\Delta = \frac{1}{5\frac{1}{2}}$, differentia altitudinum maris, quæ ex viribus Solis, aut Lunæ oriri poterit, fiet circiter $\frac{3P}{8}$.

Corollarium III.

Si fiat $\Delta = 0$, hoc est si media terræ interioris densitas, & marium affusorum statuatur eadem, erit $\frac{15P}{48}$ altitudo omnis, ad quam usque ascendent maria, & quæ etiam, juxta Probl. VII. Lib. II., ob attractrices Solis, aut Lunæ vires esset differentia semiaxium in hypothesi Terræ totius ad centrum usque fluidæ & homogeneæ. Scilicet juxta corollarium primum problematis ejusdem, esset elevatio marium ob vim Solis pedum $1\frac{11}{12}$: & si juxta Probl. XVII. Lib. II. vis Solis ad vim Lunæ se habeat ut 1:2.49, esset pedum $4\frac{1}{4}$ altitudo, ad quam maria ob eamdem Lunæ vim, seposita inertiæ ratione, elevari possent. Quia vero actæ semel in motum aqueæ particulæ excurrere debent ultra limites æquilibrii, atque ob diversam positionem littorum copiosius reflecti, in angustioribus autem fretis accumulari; simul conjunctis causis hisce omnibus fiet, quod in libero mari ordinaria fluxuum altitudo sit pedum 8, in portubus vero, sinubus, ac fretis ad pedes 50 quandoque assurgat.

Corollarium IV.

Quod si insuper intelligamus Solem, & Lunam ab oriente in occidentem volvi, vertex etiam sphæroidis illius oblongæ, in quam superficies marium omnium conformari debet, eodem ordine in occidentem converti perget, ac successive in locis occidentalibus intumescet aqua, detumescetque ad orientem, binique fluxus diebus singulis, & totidem refluxus habebuntur. Cumque ita, ut intumescant occidentem versus, ex iis locis copiosius advenire debeant aquæ, in quibus antea intumescebant; patet in æstibus hisce reciprocis potiorem aquarum motum esse oportere ab oriente in occidentem. Data autem hac generali motus directione variationes aliæ, quas libri hujus initio indicavimus, ex fundi, littorum, locorumque constitutione colligi, atque explicari facile poterunt.

Scho-

SCHOLION.

Postquam in priori capitis hujus Problemate formulas attractricium virium sphæroidis cujuscumque accedentis proxime ad sphæram, & juxta radium, & perpendiculariter ad sphæroidis axem agentium, breviter explicavimus, tribus aliis Theorematis præcipua omnia complexi sumus, quæ summi Geometræ, & in primis Clairaut Cap. II. Par. II. de Figura Terræ, atque Alembert in Dissertatione de generali ventorum caussa, & To. I., ac VI. Opusculorum circa leges æquilibrii fluidorum nucleos sphæricos, aut sphæroidicos circumambientium tradiderant. Singillatim vero in corollariis secundi Theorematis ex formularum earumdem consideratione deduximus casus omnes sphæroidum oblongarum, oblatarumque, in quibus fluidum ab æquilibrio utcumque abductum ex se in pristinam formam restitui, aut inde magis semper magisque abduci debet: de quibus casibus plura ingeniose scripserat Boscovichius. Ita explanatis iis, quæ Geometricam harum inquisitionum partem respiciunt, quæ deinde ad Physicam partem spectant in posterioribus corollariis indicare cœpimus. At marini æstus phænomenon curiosum adeo, atque adeo in singulis variationibus regulare, & constans est, ut per partes omnes evolvi, atque in sequenti capite fusius exponi debeat.

CAPUT TERTIUM.

DE FLUXU, ET REFLUXU MARIS.

PROBLEMA VII.

SI Sol, & Luna dato angulo a se invicem recedant locum maximi fluxus maris determinare.

Si Sol in productione radii OC jaceat, fig. 40., & radius mediocris Terræ vocetur C, & sit b differentia semiaxium, quæ ob vires perturbatrices Solis induci posset, erit in loco quocumque Q distantia superficiei sphæroidicæ a centro $C + b.\ \text{cos}.\ COQ^2 = C + \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} b.\ \text{cos}.\ 2CCQ$. Pariter si sit B differentia semiaxium, quæ induci posset ob vires Lunæ, & Luna in productione radii OA jaceat, erit in puncto eodem Q sphæroidis semidiameter

ter

ter $C + \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} B . \text{cos} . 2 AOQ$. Et quia ob parvitatem duarum virium censeri potest utramque simul eumdem effectum edere, quem præstaret singillatim; viribus simul agentibus erit in loco Q

altitudo fluxus $\frac{1}{2} \overline{B + b} + \frac{1}{2} B . \text{cos} . 2 AOQ + \frac{1}{2} b . \text{cos} . 2 COQ$: & quo in loco habebitur fluxus maximus, maxima etiam evadet quantitas $\frac{1}{2} B . \text{cos} . 2 AOQ + \frac{1}{2} b . \text{cos} . 2 COQ$. Diametro OQ, & centro T describatur circulus, qui duas rectas AO, OC secet in V, & U, accipianturque duo puncta v, & u satis proxima, ut sint æquales anguli VOU, vOu, atque ex iisdem punctis in diametrum demittantur perpendicula VN, UM, vn, um. Ob angulum VTQ duplum anguli VOQ, & UTQ duplum similiter anguli UOQ, in loco maximi fluxus maxima etiam evadet quantitas $B . TN + b . TM$, adeoque acceptis differentiis erit $b . Mm - B . Nn = 0$. At si circuli radius accipiatur pro unitate

est $\frac{Vv = Nn}{NV}$, & $\frac{Uu = Mm}{MU}$, & elementis arcuum Vv, Uu

positis inter se æqualibus fieri debet $Nn : Mm = NV : MU$. Itaque in loco maximi fluxus erit $B : b = Mm : Nn = MU : NV =$ sin. 2 COQ: sin. 2 AOQ, sive sinus duplorum angulorum COQ, AOQ erunt viribus in directione CO, & AO agentibus reciproce proportionales.

Corollarium I.

Simili modo si angulum AOQ augeri, & angulum COQ minui angulo exiguo z intelligamus, quia in loco maximi fluxus debet esse $\frac{1}{2} B . \text{cos} . 2 AOQ + \frac{1}{2} b . \text{cos} . 2 COQ = \frac{1}{2} B . \text{cos} . \overline{2 AOQ + z} + \frac{1}{2} b . \text{cos} . \overline{2 COQ - z}$

juxta Lem. II. Par. I. eruetur $\frac{B}{b} = \frac{\text{sin} . 2 COQ}{\text{sin} . 2 AOQ} = \frac{\text{sin} . COQ . \text{cos} . COQ}{\text{sin} . AOQ . \text{cos} . AOQ}$:

atque inde aliæ etiam analogiæ educi poterunt. Sed si Geometrice construi debeat problema, centro quocumque t, fig. 41., describatur circulus, qui transeat per punctum O, & rectas CO, AO, secet in X, & Z, jungaturque recta XZ, atque in puncto K dividatur ipsa in ratione virium reciproca, & per K ducatur radius tq, jungaturque recta OqQ, erit Q locus quæsitus. Anguli enim Xtq, Ztq dupli erunt angulorum XOq, ZOq, atque in radium tq, demissis perpendiculis Xm, Zn, erit $Xm : Zn = XK : ZK = B : b$.

Co-

COROLLARIUM II.

Si ſit M ſinus, & N coſinus anguli AOC, & ſinus anguli AOQ vocetur m, ac ſit propterea ſin. COQ $= M . \sqrt{(1 - m^2)} - m N$, & coſ. COQ $= M m + N . \sqrt{(1 - m^2)}$, poſterior corollarii antecedentis æquatio evadet

$$\frac{B}{b} = \left(\frac{M}{m} - \frac{N}{\sqrt{(1-m^2)}}\right)\left(\frac{M}{\sqrt{(1-m^2)}} + \frac{N}{m}\right):$$

inde vero, multiplicatis terminis, eruetur

$$\left(M^2 - N^2 - \frac{B}{b}\right) \frac{m . \sqrt{(1 - m^2)}}{MN} = 2 m^2 - 1,$$

&, poſito $\frac{M}{N} - \frac{N}{M} - \frac{B}{b.MN} = A$, fiet ordine

$$A^2 m^2 - A^2 m^4 = 4 m^4 - 4 m^2 + 1$$

$$(\pm m^2 \mp \tfrac{1}{2}) \sqrt{(A^2 + 4)} = \tfrac{1}{2} A$$

$$m = \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{2} \pm \frac{A}{2\sqrt{(A^2+4)}}\right)}.$$

COROLLARIUM III.

Ex priori conſtructione manifeſtum eſt quod ſi angulus AOC ſit acutus, locus maximi fluxus Q erit medius inter A, & C: quodque ſi angulus AOC ſit rectus, hoc eſt ſi Sol, & Luna reperiantur in quadraturis, punctum Q in A cadet, ibique ob vim Lunæ attollentur maria ubi vi Solis deprimentur, & contra deprimentur vi Lunæ ubi Solis vi aſſurgent: & quod denique ſi angulus AOC ſit recto major, fig. 42., duo maximi fluxus puncta cadent intra D, H, & B, A. Ope autem formulæ poſterioris, dato quocumque angulo AOC, ſemper aſſignari poterunt duo puncta ſibi invicem ex diametro oppoſita, in quibus conjunctis Solis, & Lunæ viribus maximus fluxus habebitur, & duo inſuper alia puncta quadrante integro ab iis diſſita, in quibus habebitur maximus refluxus: & cum priora duo deſignentur ambiguo ſigno, quod formulæ præfigitur, cumque ſinui $\sqrt{\left(\tfrac{1}{2} + \frac{A}{n\sqrt{(A^2+4)}}\right)}$ coſinus $\sqrt{\left(\tfrac{1}{2} - \frac{A}{2\sqrt{A^2(+4)}}\right)}$ reſpondeat, bina alia puncta ambiguo ſigno exprimentur, quod formulæ incluſum eſt.

Co-

Corollarium IV.

Quia tempus duas inter Solis, & Lunæ conjunctiones est dierum circiter $29\frac{1}{2}$, adeoque diebus singulis Luna a Sole recedit circiter $50\frac{1}{2}'$ temporis, & tempus duos inter appulsus Lunæ ad meridianum est $24^h\ 50\frac{1}{2}'$; Luna a syzigiis recedente maximus maris fluxus appulsum Solis ad meridianum subsequetur, & antecedet appulsum Lunæ, & intervallum duorum fluxuum diebus duobus se consequentium Solari die erit majus, & minus lunari. Quod si anguli AOQ, COQ, fig. 40., assumantur adeo exigui, ut eorum cosinus sint proxime æquales radiis, sinus vero sint arcubus QA, QC proportionales, in superiori analogia fiet $B:b = QC:QA$, scilicet retardatio fluxus post unam naturalem diem ad anteceffionem præ una lunari die se habebit ut vis Lunæ ad vim Solis. Quare si intervallum duorum fluxuum post syzigias diebus duobus se consequentium sit $24^h\ 37'$, ut initio hujus libri adnotavimus, fiet etiam $B:b = 37:13.5$.

Corollarium V.

Quadraturarum tempore fluxus maximus appulsum Lunæ ad meridianum subsequetur, atque intervallum duorum fluxuum una etiam lunari die erit majus: & si angulus AOC paulisper minor sit recto, fig. 42., eductaque ad Cc perpendiculari OS sinus anguli QOC radio, & cosinus arcui QS æqualis assumi possit, erit similiter $B:b = QS:QA$, scilicet paulo post quadraturas retardatio QS fluxus post unam naturalem diem erit ad retardationem QA post diem unam lunarem ut vis Lunæ ad vim Solis. Itaque simili ratione si intervallum duorum fluxuum assumatur $24^h\ 87'$, erit $B:b = 87:36.5$, quæ ratio virium perturbatricium aliquantulum ab ea discrepat, quam superius ex phænomenis præcessionis æquinoctiorum, & nutationis terrestris axis collegimus, quamque esse invenimus $2.49:1$, seu $5:2$ satis proxime.

Problema VIII.

Data proportione virium Solis, & Lunæ invenire maximam fluxus retardationem, & quæ retardationi maximæ respondet, Solis, & Lunæ distantiam inter se.

Quia locus maximi fluxus Q, fig. 40., totum angulum VOU sic dividit in binos alios VOQ, UOQ ut sinus VN, UM duplorum angulorum VTQ, UTQ sint in ratione reciproca virium secundum rectas VO, UO agentium; dato quocumque angulo UTQ, si

si accipiatur $B : b = UM : VN$, invenietur qua in directione VO Luna esse debeat, ut Sole in productione rectæ UO posito, maximus fluxus incidat in locum Q. Jam vero sinus UM fit maximus cum angulus UTQ evadit rectus, & semirectus angulus UOQ: eoque in casu maximus etiam fiet angulus UTQ, ipsiusque dimidius VOQ, eritque $\frac{b}{B}$ valor maximus sinus VN anguli ejusdem VTQ.

Quod si igitur sinus anguli VOQ ut antea vocetur m, & sit $2m\sqrt{(1-m^2)} = \text{sin.}\, 2AOQ = \frac{b}{B}$, in casu anguli ejusdem AOQ maximi debebit esse $4m^2 - 4m^4 = \frac{b^2}{B}$, atque inde eruetur primum $\pm 2m^2 \mp 1 = \frac{1}{B} \cdot \sqrt{(B^2 - b^2)}$, ac deinde $m = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2B} \cdot \sqrt{B^2 - b^2}\right)}$. Posito autem $\text{sin.}\, COQ = \text{cos.}\, COQ = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $\text{sin.}\, AOQ = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2B} \cdot \sqrt{B^2 - b^2}\right)}$, $\text{cos.}\, AOQ = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2B} \cdot \sqrt{B^2 - b^2}\right)}$, si fiat $M = \text{sin.}\, AOC = \text{sin.}\, COQ . \text{cos.}\, AOQ + \text{cos.}\, COQ . \text{sin.}\, AOQ = \sqrt{\frac{1}{2}} . (\text{sin.}\, AOQ + \text{cos.}\, AOQ)$, erit etiam $2M^2 = 1 + 2 . \text{sin.}\, AOQ . \text{cos.}\, AOQ = 1 + 2\sqrt{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4B^2} . \overline{B^2 - b^2}\right)}$, & reductis terminis sinus M angularis distantiæ AOC, quæ maximæ distantiæ fluxus a Sole, & Luna respondebit, fiet $= \sqrt{\left(\frac{B+b}{2B}\right)}$, & cosinus $N = \sqrt{\left(\frac{B-b}{2B}\right)}$.

Corollarium I.

Generatim etiam si sinus anguli COQ vocetur n, iisdem reassumptis analogiis corollarii primi, & secundi Problematis superioris, statui poterit

$$B : b = n\sqrt{(1-n^2)} : MN . \overline{1 - 2n^2} + \overline{M^2 - N^2} . n\sqrt{(1-n^2)}$$

$$\left(M^2 - N^2 - \frac{b}{B}\right) . n\sqrt{(1-n^2)} = MN . (2n^2 - 1) :$$

&

&, posito $\frac{M}{N} - \frac{N}{M} - \frac{b}{B.MN} = C$, generatim eruetur $n =$ $\pm \surd \left(\frac{1}{2} \pm \frac{C}{2\surd(C^2+4)} \right)$. Quare in casu maximi anguli COQ, posito $n = \surd(1-n^2) = \surd\frac{1}{2}$, & $2n^2 - 1 = 0$, fiet $M^2 - N^2 = 2M^2 - 1 = \frac{b}{B}$, & $M = \surd \left(\frac{B+b}{2B} \right)$.

Corollarium II.

Angulus CQQ maximæ retardationis fluxus post Solis appulsum ad meridianum, virium dumtaxat perturbatricium ratione habita, erit 45°: & quia Solis, ac Lunæ vires sunt inter se quam proxime ut 2:5; erit sinus maximi anguli $COA = \surd \frac{7}{10} = 0.8366$: qui sinus cum respondeat angulo 56° 47', subducto angulo 45°, angulus AOQ maximæ fluxus distantiæ a Luna fiet 11° 47'. Habita vero inertiæ ratione, qua fluida utcumque impulsa excurrunt ultra limites æquilibrii, retardatio fluxus maximi major etiam esse poterit: sicuti eamdem ob caussam fit, quod Solis & Lunæ viribus conspirantibus fluxus maximus duabus aut tribus horis post meridiem, & mediam noctem habeatur diebus singulis, & singulis mensibus habeatur duobus, aut tribus diebus post Novilunium, & Plenilunium.

Corollarium III.

Quia insuper generatim si G sit numerus graduum, quos angulus AOQ continet, & fiat ut 360 ad G, ita 24.60 ad quartum prodit numerus minutorum temporis, quibus angulus idem absolvitur: & quia cum sit 360:24.60 = 1:4, numerus G quater sumptus exhibet quæsitum numerum minutorum temporis; angulo 45° horæ tres, & 11° 47' respondebunt 47 $\frac{2}{15}$' temporis, hoc est maxima fluxus distantia habebitur 3^h post appulsum Solis, & 47' ante Lunæ appulsum ad Meridianum. Quia denique ab una ad alteram conjunctionem transeundo Luna absolvit 360° diebus $29\frac{1}{2}$ circiter; si fiat $360° : 56\frac{3}{4} = 29\frac{1}{2} : 4\frac{2}{3}$, patebit maximam fluxus distantiam diebus $4\frac{2}{3}$ post syzigias incidere, & diebus $2\frac{1}{3}$ circiter antecedere tempus quadraturarum.

PROBLEMA IX.

Data qualibet Solis, & Lunæ diſtantia a ſe invicem retardationes maximorum fluxuum ſupputare.

Si M ut antea ſit ſinus, & N coſinus angularis diſtantiæ Lunæ a Sole, ſinus angularis diſtantiæ fluxus maximi a Luna vocetur m, atque abſolutæ vires Solis, & Lunæ ſint inter ſe ut $b:B$, poſito $\frac{bM^2 - bN^2 - B}{bMN} = \frac{2bM^2 - B - b}{bMN} = A$, ut in Coroll. II. Probl. IX., fiet $A^2 m^2 - A^2 m^4 = 4m^4 - 4m^2 + 1$. Quia vero, juxta Probl. X., diſtantia fluxus maximi a Luna nunquam eſt major arcu $11^\circ\, 47'$, cujus ſinus m eſt circiter quinta pars radii, negligi poterit quarta ejuſdem ſinus poteſtas m^4, & fiet $(A^2 + 4)\, m^2 = 1$, ſive $m = \frac{1}{\sqrt{(A^2+4)}}$. At inſuper cum eſſe debeat $B : b = 5 : 2$ ſatis proxime, fiet etiam $A = \frac{2bM^2 - B - b}{bMN} = \frac{4M^2 - 7}{2MN}$, atque hoc valore ſubſtituto evadet $A^2 + 4 = \frac{16M^4 - 56M^2 + 49 + 16M^2N^2}{4M^2N^2}$ $= \frac{49 - 40M^2}{4M^2N^2}$. Erit itaque $m = \frac{1}{\sqrt{(A^2+4)}} = \frac{2MN}{\sqrt{(49 - 40M^2)}}$ $= \frac{\text{ſin. } 2\,AOC}{\sqrt{(29 + 20.\ \text{coſ. } 2\,AOC)}}$, ſive etiam, cum extracta radice ſit $\sqrt{(49 + 40M^2)} = 7 - \frac{20}{7}M^2 - \frac{120}{343}M^4$ &c., ſtatui poterit $m = \frac{2}{7}MN + \frac{40M^3N}{343}$ &c. $= \frac{138MN - 40N^3}{343}$ &c.

COROLLARIUM I.

Si angulus AOC ſit acutus, fig. 42., ſinus m poſitivus erit, & fluxus maximus ſubſequetur appulſum Solis ad meridianum, & antecedet appulſum Lunæ: ſi vero angulus AOC[1] diſtantiæ Solis a Luna ſit recto major, & ſinus M poſitivus maneat,

neat, cosinus autem N fiat negativus, etiam sinus m negativus fiet, & fluxus maximus subsequetur Solis, & Lunæ appulsum ad meridianum. Et quidem si anguli AOC, HOC' æquales sint inter se, antecessio fluxus AOQ æqualis erit angulo retardationis AOq, & quibus gradibus antecedet fluxus appulsum Lunæ dum ipsa a syzigiis cum Sole transibit ad quadraturas, iisdem subsequetur Lunam in reditu Lunæ ipsius a quadraturis ad syzigias.

COROLLARIUM II.

Si in priori formula $m = \frac{2MN}{\sqrt{(49-40M^2)}}$ substituantur valores sinus, & cosinus distantiæ cujuslibet propositæ Solis a Luna patebit quo arcu, & tempore fluxus maximus, seclusa inertiæ ratione, a Sole, & Luna distare debeat. Ut si angulus AOC sit 30°, vel 150°, & in utroque casu sit $M = \frac{1}{2}$, N vero $= \pm \sqrt{\frac{3}{4}}$; prodibit $m = \pm 0.1387$, qui est sinus circiter $\pm 7° 58'$, & qui juxta Coroll. II. Probl. X. respondet tempori $31 \frac{13}{15}'$. Quod si igitur Luna a Sole distet arcu 30°, maximus fluxus a Luna distabit arcu 7° 58', a Sole vero 22° 2', habebiturque $1^h 28 \frac{2}{15}'$ post Solis, & $31 \frac{13}{15}'$ ante Lunæ appulsum ad meridianum: & si Lunæ, & Solis distantia sit 150°, & distantia fluxus maximi a Luna sit in adversam partem 7° 58', & a Sole 157° 58', maximus fluxus incidet $10^h 31 \frac{13}{15}'$ post Solis, & $31 \frac{13}{15}'$ post Lunæ appulsum ad meridianum.

COROLLARIUM III.

Aliis similibus substitutionibus locus, & tempus fluxuum maximorum eruetur ut in tabula sequenti.

Distan-

Distantiæ Lunæ a Sole	Distantiæ fluxus a Sole	Distantiæ fluxus a Luna	Tempus post, & ante appulsum Solis	Tempus post, & ante appulsum Lunæ
15.°	10.° 47.'	4.° 13.'	+ 43 $\frac{2}{15}$.'	− 16 $\frac{13}{15}$.'
30.	22. 2.	7. 58.	+ 1.° 28 $\frac{2}{15}$.'	− 31 $\frac{13}{15}$.'
45.	34. 18.	10. 42.	2. 17 $\frac{1}{5}$.	42 $\frac{4}{5}$.
56.° 47.'	45. 0.	11. 47.	3. 0.	47 $\frac{2}{15}$.
60.	48. 32.	11. 28.	3. 14 $\frac{2}{15}$.	45 $\frac{13}{15}$.
75.	65. 35.	8. 25.	4. 22 $\frac{1}{3}$.	33 $\frac{2}{3}$.
90.	90. 0.	0. 0.	6. 0.	0.
105.	113. 25.	8. 25.	7. 33 $\frac{1}{3}$.	+ 33 $\frac{2}{3}$.
120.	131. 28.	11. 28.	8. 45 $\frac{13}{15}$.	+ 45 $\frac{13}{15}$.
123.° 13.'	135. 0.	11. 47.	9. 0.	47 $\frac{2}{15}$.
135.	145. 42.	10. 42.	9. 42 $\frac{4}{5}$.	42 $\frac{4}{5}$.
150.	157. 58.	7. 58.	10. 31 $\frac{13}{15}$.	31 $\frac{13}{15}$.
165.	169. 13.	4. 13.	11. 16 $\frac{13}{15}$.	16 $\frac{13}{15}$.

PROBLEMA X.

Positis omnibus, quæ antea, variationes altitudinis fluxuum determinare.

In primis cum differentiæ B, & *b* sphæroidis utriusque, quæ Lunæ, ac Solis viribus respondent, sint viribus ipsis proportionales, manifestum est altitudinem fluxus maximi, & qui a Luna, & qui a Sole gignitur, variari debere in ratione triplicata reciproca distantiæ Lunæ, & Solis a centro Terræ. Deinde si fluxus maximus in ipsum simul & Solis, & Lunæ appulsum ad meridianum loci non incidat, manifestum est partem fluxus utramlibet, & quæ

Lunæ, & quæ Soli respondet, variari debere in duplicata ratione cosinus distantiæ fluxus a Luna, & Sole. Denique si Sol, & Luna reperiantur sub æquatore, patet in loco quolibet extra æquatorem posito binos fluxus in superiori, atque inferiori Lunæ, Solisque appulsu ad meridianum, & binos pariter refluxus inter se æquales esse oportere. Quod si vero Luna aut Sol angulo EOI, fig. 34., a plano æquatoris IOK distent, & sit D*ed* sectio per polos D, *d* traducta, & differentia semiaxium OR, OE seu maxima fluxus altitudo in loco E vocetur B, erit altitudo omnis in loco $HL = B.\overline{\text{cos. } LOE}^2 = B.\text{cos. } \overline{LOI \pm IOE}^2$. Quare si sinus anguli EOI declinationis Lunæ, aut Solis ab æquatore vocetur M, cosinus vero N, & sit *m* sinus, & *n* cosinus anguli IOH latitudinis loci propositi, erit quæsita altitudo fluxus $= B.\overline{Nn \mp Mm}^2$. Nimirum erit $B.\overline{Mn - Mm}^2$ altitudo fluxuum in superiori Lunæ, Solisve appulsu ad meridianum: $B.\overline{Nn + Mm}^2$ altitudo ad appulsu ad inferiorem meridiani partem: $4B.MNmn$ differentia duorum fluxuum se proxime consequentium: atque altitudo media diurni, ac nocturni fluxus erit

$$B.\overline{N^2 n^2 + M^2 m^2} = B.\overline{1 - m^2 + 2m^2 M^2 - M^2}.$$

Corollarium I.

Quia maxima, media, & minima Lunæ distantia a Terra sunt inter se ut 1055, 1000, 945, ac sunt distantiarum cubi ut 3, $2\frac{1}{2}$, 2; fluxus maximi, qui ob vim Lunæ excitari possunt in apogæo, in distantia mediocri, atque in perigæo erunt inter se ut $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{2}$: & simili modo hyberni æstus, qui ex Sole oriuntur, majores erunt æstivis. Pariter cum quadratum cosinus 11° 47′ sit 0.958, & quadratum cosinus 45° sit $\frac{1}{2}$; in maxima fluxus distantia a Sole, & Luna, quæ ex Luna quidem pendebit altitudo fere $\frac{1}{24}$, quæ vero ex Sole $\frac{1}{2}$ deficiet a maxima altitudine: eademque ratione in distantiis aliis quibuslibet altitudinum differentiæ supputari poterunt.

Corollarium II.

Si Sol, & Luna reperiantur sub æquatore, & sit $M = 0$, aut si ipsis extra æquatorem positis fiat $m = 0$, & locus aliquis accipiatur sub æquatore, eadem erit altitudo duorum fluxuum proxime se consequentium in superiori, atque inferiori Solis, & Lunæ appulsu ad meridianum. Generatim vero pro loco quolibet, si M, & *m* afficiantur eodem signo, superior fluxus $B.\overline{Nn + Mm}^2$ major erit fluxu inferiori

feriori B.$\overline{Nn - Mm}^2$, ſecus vero ſi M, m afficiantur diverſis ſignis, & ſit Mm negativa: ſcilicet in locis ſeptentrionalibus, qui ſuperiori appulſui reſpondebit fluxus erit major dum Sol, aut Luna in ſeptentrionalibus itidem ſignis eclipticæ reperientur, minor vero dum Sol, aut Luna pervenient ad ſigna auſtralia. At media altitudo fluxuum B.$\overline{1 - m^2 + 2m^2 M^2 - M^2}$ manebit eadem quocumque ſigno M, & m afficiantur.

COROLLARIUM III.

Inde etiam caſus omnes peculiares facile colligentur. Si ſit $M = m$, & $N = n$, hoc eſt ſi loci propoſiti latitudo æqualis ſit diſtantiæ Solis, aut Lunæ ab æquatore, in ſuperiori appulſu ad meridianum maxima habebitur fluxus altitudo B.$\overline{M^2 + N^2}^2 = B$, in inferiori vero erit tantum B.$\overline{N^2 - M^2}$. Quod ſi inſuper in poſteriori hoc caſu fuerit $N = M$, aut univerſim ſi ſit $Nn = Mm$, & ſinus M, m afficiantur eodem ſigno, hoc eſt ubi diſtantia loci propoſiti a polo exæquat diſtantiam Solis, aut Lunæ ab æquatore, unicus dumtaxat fluxus habebitur in ſuperiori appulſu ad meridianum. Si latitudo loci ſit 45°, & fiat $m^2 = \frac{1}{2}$, erit media altitudo fluxus $\frac{1}{2}$B, quicumque demum ſit valor ſinus M, hoc eſt pro qualibet Lunæ aut Solis diſtantia ab æquatore. Si latitudo loci ſit minor 45°, & $m^2 < \frac{1}{2}$ altitudo media duorum fluxuum ſe proxime conſequentium fiet maxima cum Sol, & Luna reperientur in æquatore, eritque $M = 0$.

SCHOLION.

Newtonus in Propoſ. XXIV. Lib. III. Princip. aliis Geometris facem prætulerat ut varium adeo, & multiplex marini æſtus phænomenon ex perturbatricibus Solis, ac Lunæ viribus derivando ad calculum revocarent. Calculum omnem ſummi Geometræ Daniel Bernoullius, Mac-Laurinus, & Eulerus occaſione præmii propoſiti anno 1740 exhibuerunt. Mac-Laurinus autem theorema elegantiſſimum attractionis, & æquilibrii ſphæroidum homogenearum præcipue tradidit. Bernoullius attractionem ſphæroidum, quæ ad ſphæras proxime accederent, ſub polis, & æquatore ſupputavit, atque inde eruit quæ differentia altitudinum maris, & atmoſphæræ eſſe debeat, in hypotheſi quod æquentur utrobique ſub polis, & æquatore pondera columnarum a ſuperficie fluidi ad centrum uſque pertingentium. Atque ita quidem marini æſtus altitudinem proxime eamdem

dem eruit, quæ juxta Coroll. III. Theor. III. esse debet in hypothesi marium solido, ac sphærico telluris nucleo affusorum. In aere vero homogeneo altitudinum differentiam, quæ ob vires Solis induci posset, pedum 1700 esse invenit, &, quæ differentiæ eidem responderet, variationem mercurii in barometris suspensi, linearum etiam 20: cum potius differentiæ densitatis nuclei solidi, & aeris ratione habita, æquatisque inter se viribus columnarum superficiei nuclei insistentium variatio altitudinis aeris, & mercurii adeo exigua sit ut nullo modo sensibilis possit evadere, quemadmodum in Corollario quarto Theorematis ejusdem notatum est. At insuper attractionum formulis Bernoullius, & marini æstus phænomenis per partes singulas evolutis altitudinem fluxus pro loco quolibet, fluxusque ipsius distantiam a Sole, & Luna pro qualibet Solis, & Lunæ distantia a se invicem supputare docuit, & problema etiam maximæ fluxus distantiæ analytice resolvit. Geometricam, nitidamque ejusdem problematis solutionem exhibuit Cl. Boscovichius in Diario Romano anno 1748. Initio hujus capitis solutionem aliam, constructionemque Geometricam adjecimus, ac deinde easdem Bernoullii formulas ex formulis Trigonometricis sinuum, ac cosinuum collegimus, ipsasque ad supputandam altitudinem, & tempus fluxuum brevissime aptavimus. Rationem autem perturbatricium Solis, & Lunæ virium eamdem assumpsimus, quæ ex certissimis phænomenis præcessionis æquinoctiorum, nutationisque terrestris axis deducitur, quæque non nisi minus accurate sive ex magnitudine, sive etiam ex intervallo, & duratione æstuum in syzigiis, & quadraturis determinari posset. Motus enim omnes posteriores maris prioribus afficiuntur aliquo modo, augenturque, atque idcirco fit quod mare pluribus diebus agitatum, turbatumque post syzigias, & quadraturas altius assurgat quam ferat proportio virium solarium, & lunarium. At hi etiam excursus ultra limites æquilibrii, quæ ex naturali inertia partium fluidarum, atque ex impressis viribus oriuntur, tempus etiam maximi fluxus debent afficere, & distantiam a Sole, & Luna aliam exhibere quam quæ a viribus perturbatricibus induci posset. In Coroll. II. Probl. alia phænomena attigimus, quæ ex eodem inertiæ principio profluunt. Inde etiam fit quod cum luminaribus positis sub æquatore bini æstus interdiu, & noctu se proxime consequentes æquales sint, iique juxta posterius corollarium superent altitudinem mediam aliorum fluxuum, majores fiunt quam qui in toto anni curriculo observari solent.

DE

DE ATMOSPHÆRA PLANETARUM.

LIBER QUINTUS.

SOlares maculæ cum eodem tempore revolutionem integram circa Solem absolvant omnes, cumque insuper fere omnes diutius lateant ultra Solem quam citra ad Solarem discum referantur, nec solidæ, profundioresque Solis partes esse possunt, nec inhærere ipsius superficiei, sed inde altius attolli debent, & innatare atmosphæræ alicui, eodemque ubique angulari motu circa axem eumdem abripi. Maculæ illæ, quas anno *1676* Cassinus, anno *1684* Kirchius, Stannianus anno 1703, aliique aliis temporibus observarunt, diebus circiter 12 apparuerunt in disco Solis, latueruntque circiter diebus 15. Dato autem quod differentia temporum occultationis, & apparentiæ macularum sit nonæ partis totius periodi; arcus conspicui, & inconspicui differentia erit 40°: atque hujusmodi differentiam minuendo in ratione temporum revolutionis veræ, atque e Terra visæ, sive in ratione 25 : 27; arcus FG, fig. 43., unde maculæ viderentur e Terra immota in discum Solarem projici, ab arcu FHG differet 37° circiter: productaque semidiametro Solis DA quousque circulo FGH in L occurrat, cum tangentes binæ AF, CG, quæ in spectatoris oculo simul concurrunt, pro parallelis assumi possint, arcus LF fiet $9\frac{1}{4}$° circiter. Itaque sinus versus AL ad radium DL circuli circa Solem a maculis descripti se habebit circiter ut 13:1000, ad ipsum vero Solis radium DA ut 13:*987*, seu proxime ut 1:*76*, & si radio Solis tribuamus semidiametros terrestres 100, altitudo omnis, ad quam maculæ e superficie Solis avulsæ plerumque ascendent, erit semid. $1\frac{1}{3}$ circiter. Krafftius To. VII. Academiæ Petropolitanæ unam maculam commemoravit, cujus certa erat reversio, quæque apparuit diebus 13, & 14 dumtaxat latuit quæque idcirco non nisi sexta semidiametri terrestris parte a superficie Solis distare poterat. Plures maculas, quæ dimidio fere revolutionis totius tempore conspicuæ

fue-

fuerint, ipſique propterea adhæſerint Solis ſuperficiei, memoravit Keillius Lect. V. Aſtronomiæ, & Monnierius Cap. V. Inſtitutionum. Ex tot iis, quarum hiſtoriam contexerat Scheinerus, vix fuit aliqua, quæ apparuerit diebus 12: plures quæ diebus 12 $\frac{1}{2}$, 13, 13 $\frac{1}{2}$ in diſco Solis viſæ ſunt. Et cum in ſingulis hiſce caſibus maculæ ad extremum uſque diſci ſolaris marginem ſatis conſpicuæ fuerint, nullum jam amplius dubitandi locum relinquunt quod ea temporum differentia aliunde quam ex diverſa macularum diſtantia a ſuperficie Solis profluxerit.

Hoc autem fluidum, quod prope ipſam ſuperficiem ſic denſum eſt ut nigricantes exhalationes ad tantam uſque altitudinem elevare ſoleat, utque ad eamdem angularis motus rationem in ſtratis ſingulis componatur, longius a Sole recedendo variari maxime, ac rareſcere, & latiſſime extendi ex Cometarum caudis, atque ex amplitudine luminis illius colligitur, quod cum anno 1683 detectum intra Zodiacum præcipue effundi obſervaſſet Dominicus Caſſinus, lumen Zodiacale appellavit. Cum enim lumen illud oriri nequeat niſi ex fluido aliquo ſubtiliſſimo, quod undique Solarem lucem reflectat, in plano æquatoris Solis nunquam gradibus 60, aut 50 minus excurrere videtur, & quandoque etiam amplius quam 100: adeoque ſemper ultra orbitam Mercurii, & Veneris, quæ pluſquam gradibus 48 a Sole nunquam recedit, & quandoque etiam excurrit ultra orbitam Terræ, & Martis. Latitudine vero lumen illud cum intra 13, ac 20 gradus circa axem rotationis Solis contineatur, pro varia Solis ad horizontem obliquitate, & crepuſculorum vi, ac duratione obſervari diverſimode, atque autumnali tempore ante ortum Solis, verno autem poſt occaſum vividius cernitur, ut fuſe jam a Caſſino, & Mairano obſervatum eſt. In hac igitur Solari atmoſphæra cum ſemper Venus, & Mercurius, & quandoque etiam Luna, Mars, & Cometæ ad perihelium accedentes immergantur, particulas fluidi debent undique circa ſe rapere, & admodum atmoſphæræ alterius cohibere. In remotiſſimis autem aphelii locis atmoſphæra Cometarum diutiſſime debet rigeſcere, & in reditu ad Solem explicare iterum ſe ſe, & in ampliſſimum capillitium illud abire, quod interiorem nucleum circumdat, & nuclei diametrum quandoque decuplo, & amplius ſuperat. Tanta etiam caloris differentia in perihelio perculſæ rariores partes magis, magiſque expandi debent, quouſque gravitatis ſpecificæ defectu in Solari ipſa atmoſphæra altius avolent, & longiorem caudam exhibeant: & cum primo ad partes Soli oppoſitas, atque in eodem

plano orbitæ a Cometis descriptæ dirigantur, progrediente capite ad Solem attrahi, atque ita incurvari debent, ut concavitatem partibus illis objiciant, ad quas motus omnis dirigitur.

Atmosphæra Lunæ cum satis rara, & variabilis esse debeat ut in syderibus prope discum transeuntibus variationem figuræ, coloris, motus non nisi aliquando sensibilem exhibeat, qua in re tot, & tam variæ prodierunt Astronomorum observationes, manifeste tamen eclipseos Solaris tempore oculis omnium se se offert cum Sole obtecto, lucem undique reflectendo, phænomenon annuli disco lunari circumpositi videndum præbet. Annulus enim cum eousque in latitudinem pateat ut duodecimam partem lunaris diametri exæquet, ex inflexione aliqua radiorum prope marginem Lunæ transeuntium oriri nequit, ut olim Isleus, & Stancarius suspicabantur: nam vis, quæ lucem deflectit e recto tramite, quæcumque sit, non nisi in minimis distantiis corporum se prodit. Contra longe amplior, & non Lunæ, sed Soli concentricus esset annulus, si, ut censuerat Cassinus, oriretur ex ipsa luce ab atmosphæra Solis remissa ad Terram nostram. Annuli etiam phænomena ostendunt densiorem, & aquæ similem esse non posse atmosphæram Lunæ, in qua adeo illabentes radii inflectantur, ut plusquam dimidiam illustrent portionem disci, & adhuc annulum eclipseos Solaris tempore obversum nobis exhibeant: in hac enim Clariss. Boscovichii hypothesi extremo lunari disco, ad quem radii oblique transeunt, similis esset annulus, & cum unum lunarem digitum, juxta Cassini, Louvillei, aliorumque observationes latitudine exæquet, in singulis noviluniis videri posset. Annulus tamen non nisi eclipseos tempore conspicitur, & nihil habet, quod luci a Lunæ disco reflexæ assimiletur. Controversiam hanc omnem de lunari atmosphæra diremisse videtur D. du Séjour in actis Parisiensis Academiæ anni 1764, & 1765, cum solarium eclipsium observationibus ingeniose collatis inter se animadvertit conciliari posse omnes statuendo, quod radii Solis prope marginem Lunæ transeuntes inflexionem $4''$ subeant accedendo ad lineam illam, quæ a centro Lunæ ad spectatoris oculum ducitur. Quæ cum author clarissimus phænomenis singulis aptaverit initii, finis eclipsium, maximæ obscurationis, distantiæ cornuum &c., uno simul argumento, & difractionem radiorum lucis, quæ in partes adversas fieret, rejecit, & refractionem horizontalem Lunæ $2''$ esse invenit, ostenditque lunarem atmosphæram millies fere rariorem esse nostro aere, in quo refractio horizontalis est $32\frac{1}{2}'$ circiter.

 At-

Atmosphæra etiam Veneris in posteriori utroque per Solem transitu præcipue innotuit. In priori enim transitu diei 10. Junii anni 1761 DD. Strömer, Wargentin, Mallet, Melander, aliique Sueci Astronomi agnoverunt interiorem utrumque contactum Veneris in ingressu, & egressu fuisse paulo ampliorem, tanquam si discus Veneris ultra circularem formam exundans ligaminis cujuspiam specie Solis limbo adhæsisset: atque insuper splendorem quemdam ante immersionem perfectam, & incœpta jam emersione Veneris disco affusum deprehenderunt: quam etiam speciem annuli D. de Chappe Tobolski, & Parisiis DD. de Fouchy, & Ferner observarunt. Die vero 3. Junii anni 1769 Melander, aliique plures Upsaliæ, & Gadolinus Aboæ, in Veneris ingressu, ante contactum interiorem, deprehenderunt Veneris discum nigra quadam fasciola Soli adhæsisse, quæ etiam abrumpi sæpius, iterumque coire momento temporis visa est. Variationes aliæ, quæ in disco Martis, Jovis, & Saturni distingui solent, simili modo indicant sua atmosphæra singulos circumdari. Quæ enim in superficie Martis distingui solent maculæ, ac zonæ, cum diversis temporibus loco, figura, ac magnitudine differant inter se, sine aliquo fluido, quod solidam Planetæ massam circumambiat, nequeunt intelligi. Simili modo Hugenius aliquam esse atmosphæram Jovis ex varia, & irregulari zonarum forma collegerat, quæ modo magis modo minus distant a se invicem, & modo plures, modo pauciores sunt, quandoque binæ, aut tres, & quandoque etiam quinque, ut retulit Jacobus Cassinus in actis anni 1735. Dominicus Cassinus in actis anni 1715 retulit Saturnum ansis destitutum telescopio pedum 114 ejusdem formæ apparuisse, cujus Jupiter telescopio pedum 34 intueri solet, binis scilicet zonis sectus, rectilineis, & plano annuli parallelis, quæ annis subsequentibus arctiores, curvæ aliquantulum, & versus annulum convexæ visæ sunt, quandoque etiam in unam tantum coaluerunt, sæpe autem telescopiis distingui nequeunt. Maculæ insuper quæ in disco Jovis ampliari propinquitate Solis, & numero augeri videntur, variationes siderum nonnunquam prope Martis limbum transeuntium, analogia aliorum Planetarum confirmat quemque etiam Planetam superiorem fluido aliquo ad modum atmosphæræ circumdari.

Atmosphæra terrestris varium adeo, & multiplex exhibet elasticitatis, pressionis, densitatis, &, quod inde pendet, suspensionis mercurii in barometris, alternorum aeris excursuum, & generalis venti, qui intra Tropicos ab Oriente continue advenit,

phæ-

phænomenon. Legem, ac variationes venti Hallejus in Transact. Philos. anni 1686, Dampierius, aliique plures itineratores descripserunt. Scilicet cum Sol ab æquatore declinat ad Cancri Tropicum, in maribus citra æquatorem positis ventus ab æquatoris, & horizontis intersectione videtur flare, & in maribus aliis ultra æquatorem spirat tunc temporis ex intersectione horizontis, & Tropici Capricorni: & contra delato Sole ultra æquatorem in maribus ultra æquatorem positis orientalis ventus ex intersectione æquatoris, & in maribus citra positis ex Tropico Cancri advenit: undique vero ultra zonam torridam ad quatuor, & quinque gradus hinc illinc extra tropicos orientalis ventus extenditur. Directionem hanc generalem venti circa insulam Borboniam potissimum, atque ab orientali Africæ littore ad insulam Javam usque magnis etiam variationibus sæpius obnoxiam esse retulit D. Nux in Historia Parisiensis Academiæ anni 1760. Quæ ad limites altitudinis, figuramque cujuslibet atmosphæræ, quæque ad terrestris potissimum atmosphæræ æquilibrium, & pressionem stratorum omnium pertinent, jam antea tractare cœperam in Dissertatione de Atmosphæra Planetarum, quæ anno 1758 Parisiensis Academiæ præmium obtinuit. Tum enim præmio proposito ab Academia quærebatur num omnia cælestia corpora suas atmosphæras habeant, & quæ cujusque atmosphæræ altitudo sit. Modo quæ ad atmosphæram nostram, & barometricas potissimum quæstiones spectant fusius exponere, & quæ generalem ventorum caussam, ac motum aeris respiciunt, singillatim adjicere oportet.

CAPUT PRIMUM.

DE PRESSIONE, ET DENSITATE ATMOSPHÆRÆ.

PROBLEMA I.

Data lege vis centripetæ, & posito quod planetæ alicujus densitas sit proportionalis ponderibus comprimentibus addita constanti aliqua quantitate, invenire legem densitatis.

Sit radius sphæræ fluidæ $CN = r$, fig. 44, $MN = x$, $Mm = dx$. Sit etiam D fluidi densitas, & g gravitas absoluta ad extimam superficiem N, & in alio quolibet loco M sit gravitas $\frac{gr^{e}}{(r-x)^{e}}$.

Denique fit π denfitas in loco eodem M, & $d\pi$ differentia denfitatis in locis M, & m, differentia autem ponderis $\frac{g r^n \pi dx}{(r-x)^n}$. Si denfitas omnis fit ponderi proportionalis addita conftanti aliqua quantitate C, & variatio denfitatis fit proportionalis differentiæ ponderum comprimentium, erit

$$gD + C : \frac{g r^n \pi dx}{(r-x)^n} = D : d\pi,$$

atque inde eruetur $\frac{d\pi}{\pi} = \frac{g D r^n dx}{gD+C.(r-x)^n}$: & fi C^1 denotet conftantem aliam quantitatem, fumpto integrali, & pro logarithmorum modulo accepta unitate *, erit

$$\log.\ \pi = C^1 + \frac{g D r}{\overline{n-1}.\overline{gD+C}.(r-x)^{n-1}}.$$

At pofito $x=0$ in loco N fit $\log.\ D = C^1 + \frac{g D r}{\overline{n-1}.\overline{gD+C}}$.

Itaque loco C^1 fubftituendo $\log.\ D - \frac{g D r}{\overline{n-1}.\overline{gD+C}}$ fiet etiam

$$\log.\ \pi - \log.\ D = \log.\frac{\pi}{D} = \frac{g D r}{\overline{n-1}.\overline{gD+C}}\left(\left(\frac{r}{r-x}\right)^{n-1} - 1\right):$$

& fi E fit numerus, qui pro logarithmo habet unitatem, fiet denique

$$\frac{\pi}{D} = E^{\frac{g D r}{\overline{n-1}.\overline{gD+C}}\left(\left(\frac{r}{r-x}\right)^{n-1} - 1\right)}.$$

Corollarium I.

Si fit $n=1$, hoc eft fi gravitas fit inverfe ut diftantia a centro, fiet in priori æquatione $\frac{d\pi}{\pi} = \frac{g D r dx}{\overline{gD+C}.\overline{r-x}}$, & $\log.\ \pi = C^1 - \frac{g D r}{gD+C}.\ \log.\ \overline{r-x}$: & cum fit $C^1 = \log.\ D + \frac{g D r}{gD+C}.\ \log.\ r$, fiet etiam $\log.\frac{\pi}{D} = \frac{g D r}{gD+C}.\ \log.\frac{r}{r-x}$: fcilicet lo-

logarithmi densitatis π auctæ accedendo ad centrum erunt ut logarithmi distantiæ a centro inverse sumptæ, &, si distantiæ $r-x$ sumantur in progressione geometrica descrescente, densitates π crescent in ratione geometrica. Erit etiam universim $\frac{\pi}{D} = \left(\frac{r}{r-x}\right)^{\frac{gDr}{gD+C}}$, & in centro ipso, posito $r=x$, densitas fiet infinita, ut in casu alio quolibet exponentis n positivi, & gravitatis accedendo ad centrum crescentis in ratione aliqua distantiæ inverse sumptæ.

Corollarium II.

Si sit $n=2$, hoc est si gravitas sit reciproce ut quadratum distantiæ, evadet $\log. \frac{\pi}{D} = \frac{gDrx}{\overline{gD+C}.\overline{r-x}}$: & si aliæ a centro distantiæ sint $r-x'$, $r-x''$ &c., atque analogæ densitates π', π'' &c., erit pariter $\log. \frac{\pi'}{D} = \frac{gDrx'}{\overline{gD+C}.\overline{r-x'}}$, $\log. \frac{\pi''}{D} = \frac{gDrx''}{\overline{gD+C}.\overline{r-x''}}$, &c.: reductisque terminis fiet $\log. \frac{\pi'}{D} - \log. \frac{\pi}{D} = \log. \frac{\pi'}{\pi} = \frac{(x'-x).\ r}{(r-x)(r-x')}$, & $\log. \frac{\pi''}{\pi'} = \frac{(x''-x').\ r}{(r-x')(r-x'')}$. Quod si igitur accipiatur $\frac{x'-x}{r-x} = \frac{x''-x'}{r-x''}$, hoc est si distantiæ accipiantur in progressione harmonica; erit $\log. \frac{\pi'}{\pi} = \log. \frac{\pi''}{\pi'}$, hoc est logarithmi densitatum erunt in progressione arithmetica, & densitates ipsæ in progressione geometrica.

Corollarium III.

Si gravitas sit directe ut distantia a centro, quod primum in sphæra homogenea habet locum, hoc est si sit $n=-1$, erit $\frac{d\pi}{\pi} = \frac{gD.\overline{r-x}.dx}{\overline{gD+C}.r}$, & $\log. \pi = C' + \frac{gD}{gD+C} \cdot \frac{rx-\frac{1}{2}x^2}{r}$: cumque posito $x=0$ fiat $\log. D = C'$, si fiat insuper $r-x=z$, erit

erit etiam log. $\frac{\pi}{D} = \frac{gD}{gD+C} \cdot \frac{2rx - x^2}{2r} = \frac{gD}{gD+C} \cdot \frac{r^2 - zz}{2r}$.
Quod si igitur aliæ a centro distantiæ sint z', z'', ac sit similiter log. $\frac{\pi'}{D} = \frac{gD}{gD+C} \cdot \frac{r^2 - z'z'}{2r}$, & log. $\frac{\pi''}{D} = \frac{gD}{gD+C} \cdot \frac{r^2 - z''z''}{r}$, reductis terminis patebit, posito log. $\frac{\pi'}{\pi} =$ log. $\frac{\pi''}{\pi'}$, hoc est acceptis densitatibus in progressione geometrica, esse oportere $2z'z' = zz + z''z''$, hoc est quadrata distantiarum esse in progressione arithmetica.

Problema II.

Data lege vis centripetæ, & posito quod atmosphæræ densitas sit proportionalis ponderibus comprimentibus addita constanti aliqua quantitate, invenire atmosphæræ densitatem.

Sit radius Planetæ r, atmosphæræ R, distantia loci propositi a centro $R - x$, densitas atmosphæræ in superficie Planetæ D, gravitas absoluta g, A altitudo fluidi homogenei æquiponderantis toti atmosphæræ, gAD absolutum pondus: atque ad distantiam $R - x$ a centro sit gravitas $\frac{gr^n}{(R-x)^n}$, densitas autem π. Erit $\frac{gr^n \pi dx}{(R-x)^n}$ differentia ponderis, quæ respondebit differentiæ altitudinis dx. Quare in eadem hypothesi densitatis proportionalis ponderibus comprimentibus addita constanti aliqua quantitate, erit
$gDA + C : \frac{gr^n \pi dx}{(R-x)^n} = D : d\pi$,

& log. $\pi = C' + \frac{gDr^n}{\overline{n-1} \cdot \overline{gDA+C} \cdot (R-x)^{n-1}}$:

& quia, posito $x = R - r$, fit log. $D = C' + \frac{gDr}{\overline{n-1} \cdot \overline{gDA+C}}$,

iisdem problematis alterius reductionibus eruetur

$$\text{log. } \frac{\pi}{D} = \frac{gDr}{\overline{n-1} \cdot \overline{gDA+C}} \cdot \left(\left(\frac{r}{R-x} \right)^{n-1} - 1 \right)$$

$$\frac{\pi}{D} = E^{\frac{gDr}{\overline{n-1} \cdot \overline{gDA+C}} \left(\left(\frac{r}{R-x} \right)^{n-1} - 1 \right)}.$$

Co-

COROLLARIUM I.

Si quantitas constans C adeo parva intelligatur ut possit negligi, atque, ut ferunt Mariotti, aliorumque experimenta, densitatis variatio proportionalis sit variationi ponderum comprimentium, ac distantiis z a superficie Planetæ sumptis fiat $z = R - x - r$, & $R - x = r + z$; formula omnis evadet

$$\frac{\pi}{D} = E^{\frac{r}{\overline{n-1}\,.\,A}\left(\left(\frac{r}{r+z}\right)^{n-1}-1\right)}:$$

& si fiat insuper $n = 0$, erit $\frac{\pi}{D} = E^{\frac{-z}{A}}$, & $\log.\frac{\pi}{D} = -\frac{z}{A}$, sive etiam $A.\log.\frac{D}{\pi} = z$: posito autem $n = 2$ erit

$$\frac{\pi}{D} = E^{\frac{-rz}{A(r+z)}}.$$

COROLLARIUM II.

Primo igitur cum $\frac{r}{r+z}$ sit quantitas minor unitate, & sit propterea $\frac{rz}{A.(r+z)} < \frac{z}{A}$, densitas $\frac{\pi}{D}$ recedendo a Planetæ superficie minor fiet si gravitas per totam altitudinem constans sit, quam si minuatur gravitas in duplicata ratione auctæ distantiæ a centro: ut etiam patet ex quo altius ascendendo plus ponderis comprimentis deficere debeat in priori hypothesi quam in secunda. Deinde vero in hypothesi gravitatis constantis cum sit $A.\log.\frac{D}{\pi} = z$, altitudines supra Planetæ superficiem proportionales erunt logarithmis, qui rationem densitatis atmosphæræ in superficie ipsa Planetæ, atque in proposita qualibet altitudine definient.

COROLLARIUM III.

Posita insuper $n = 0$, si altitudo atmosphæræ z assumatur infinita, prodibit $\frac{\pi}{D} = \frac{1}{E^{\infty}}$, scilicet densitas in extrema atmosphæræ regione evadet infinite parva. At si sit $n = 2$, in hypothesi

thesi eadem infinitæ altitudinis, fiet $\frac{\pi}{D} = \frac{1}{E^{\frac{A}{}}}$. Generatim etiam si sit $n-1$ quantitas positiva, erit $\left(\frac{r}{r+z}\right)^{n-1}$ quantitas infinite parva, eaque neglecta præ unitate, atmosphæræ densitas emergere videbitur finita. At observandum est quod si densitas in superficie Planetæ finita sit, in hypothesi quavis gravitatis in majoribus distantiis decrescentis, posita $z = \infty$ fieri debet $\pi = 0$, & $d\pi = 0$: cumque ita prior analogia problematis evadat

$$g\,DA : D = -\frac{g r^n \pi\, dz}{(r+z)^n} : d\pi = 0 : 0,$$ analogiæ eidem, & reductionibus subsequentibus amplius non erit locus.

PROBLEMA III.

Iisdem positis pro data qualibet altitudine supra terrestrem superficiem invenire altitudinem Mercurii in Barometris suspensi.

Si altitudo Mercurii prope terrestrem superficiem toti atmosphæræ æquiponderantis vocetur B, & sit absolutum pondus $gB = gAD$, atque ad distantiam z ab ipsa superficie altitudo Mercurii vocetur δ, eadem autem distantia præ tota distantia a centro adeo sit parva ut differentia ponderis in punctis singulis possit negligi, atque absolutum pondus Mercurii censeri possit $\frac{g r^n \delta}{(r+z)^n}$, ac denique si atmosphæræ densitates D, & π proportionales sint ponderibus comprimentibus gB, & $\frac{g r^n \delta}{(r+z)^n}$, addita constanti quantitate C, atque ita fiat

$$\pi : D = \frac{g r^n \delta}{(r+z)^n} + C : gB + C;$$ erit etiam

$$\delta = \left(\frac{gB+C}{g}\right)\left(\frac{r+z}{r}\right)^n \cdot \frac{\pi}{D} - C \cdot \left(\frac{r+z}{g r^n}\right)^n.$$

At vero in formulis problematis præcedentis, posito $gB = gDA$, esse debet

$$\frac{\pi}{D} = E^{\frac{g D r}{\overline{n-1}.\overline{gB+C}}\left(\left(\frac{r}{r+z}\right)^{n-1} - 1\right)}$$

Hac

Hac igitur ſubſtitutione facta prodibit

$$\delta = \left(\frac{g\mathrm{B}+\mathrm{C}}{g}\right)\left(\frac{r+z}{r}\right)^{n} \cdot \mathrm{E}^{\frac{g\mathrm{D}r}{\overline{n-1}.\,g\overline{\mathrm{B}+\mathrm{C}}}\left(\left(\frac{r}{r+z}\right)^{n-1}-1\right)} - \mathrm{C}.\frac{(r+z)^{n}}{g r^{n}}.$$

Corollarium I.

Si aeris denſitas ſtatuatur proportionalis ponderibus comprimentibus, & fiat $\mathrm{C}=0$, evadet $\delta = \mathrm{B}.\left(\frac{r+z}{r}\right)^{n}.\frac{\pi}{\mathrm{D}}$, &

$$\frac{\pi}{\mathrm{D}} = \mathrm{E}^{\frac{\mathrm{D}r}{\mathrm{B}.\overline{n-1}}\left(\left(\frac{r}{r+z}\right)^{n-1}-1\right)}$$: & ſi fiat inſuper $z = -r$, hoc eſt ſi atmoſphæram omnem intelligamus traductis canalibus continuari ad centrum uſque, prodibit

$$\frac{\pi}{\mathrm{D}} = \mathrm{E}^{\frac{\mathrm{D}r}{\mathrm{B}.\overline{n-1}}\left(\left(\frac{r}{0}\right)^{n-1}-1\right)},$$ & $\delta = \mathrm{B}.0^{n}.\frac{\pi}{\mathrm{D}}$. Quare in hypotheſi gravitatis conſtantis, poſito $n=0$, fiet

$$\frac{\pi}{\mathrm{D}} = \mathrm{E}^{\frac{-\mathrm{D}r}{\mathrm{B}}.\left(\frac{0-1}{1}\right)} = \mathrm{E}^{\frac{\mathrm{D}r}{\mathrm{B}}}$$: & cum quantitas quælibet utcumque exigua ad poteſtatem exponentis 0 evecta æqualis ſit unitati, fiet $\delta = \mathrm{B}.\mathrm{E}^{\frac{\mathrm{D}r}{\mathrm{B}}}$. Si ſit n major unitate, denſitas $\frac{\pi}{\mathrm{D}}$ ad centrum fiet infinita, & erit altitudo mercurii $\delta = 0.\frac{\pi}{\mathrm{D}} = 0.\frac{1}{0} = \frac{0}{0}$. At cum $\frac{g r^{n}\delta}{(r+z)^{n}}$ non exprimat pondus mercurii in barometris ſuſpenſi niſi gravitas $\frac{g r^{n}}{(r+z)^{n}}$ per totam altitudinem δ ubique eadem invariabiliter cenſeri poſſit; barometro ad centrum uſque translato, aut in modicis tantum a centro ipſo diſtantiis patet rurſus analogiæ, & calculis præcedentibus amplius non eſſe locum.

COROLLARIUM II.

Quod si insuper in hypothesi eadem gravitatis constantis, & posito $n = 0$, pro modulo logarithmorum ut antea accipiatur unitas; quia altitudines Mercurii in barometris suspensi B, & β proportionales sunt densitatibus D, & π, erit log. $\frac{D}{\pi} =$ log. $\frac{B}{\beta} = \frac{z}{A}$,

$$\& \log. \beta = \log. \frac{B\pi}{D} = \log. B - \log. \frac{D}{\pi} = \log. B - \frac{z}{A} = \log. B - \frac{Dz}{B}.$$

Quod si vero logarithmi accipiantur ex tabulis Briggianis, in quibus modulus est $\frac{1}{2.302585} = 0.43429448$, in priori integratione valorem log. $\frac{\pi}{D}$ per modulum ipsum dividendo fiet

$$\text{I. } \log. \frac{B}{\beta} = 0.43429448 \cdot \frac{z}{A} = 0.43429448 \cdot \frac{Dz}{B}$$

$$\text{II. } \log. \beta = \log. B - 0.43429448 \cdot \frac{Dz}{B} = \log. B - \frac{Dz}{2.302585 \cdot B}.$$

COROLLARIUM III.

Data ratione densitatis aeris, & Mercurii in loco quovis proposito, datisque simul altitudinibus barometricis in vertice, & ad pedes montis alicujus, altitudo montis, & vicissim data altitudine montis, & altitudine barometrica ad basim inveniri poterit quæ altitudo mercurii ad verticem esse debeat. Ita si proportio densitatum aeris, & mercurii ea assumatur, quam tradidit Muschenbroekius §. 850. Physicæ, scilicet 0.00125 : 13.593, sive 1 : 10874, & Mercurii altitudo sub æquatore, & in ipsa maris libella assumatur juxta Bouguerii experimenta lin. 337, & in vertice montis Pichincha lin. 191; erit altitudo A aeris homogenei hexapedarum 4241, & montis altitudo $z = \frac{A}{0.4343}$. log. $\frac{B}{\beta} = 2409$. Quod si alia densitatum ratio assumatur 0.00125 : 14, sive 1 : 11200, quam Muschembroekius idem exhibuit §. 1422., prodiret altitudo montis hexap. 2481, & adhuc major prodiret altitudo si ratio densitatum aeris, & Mercurii juxta Cotesii experimenta assumeretur 1 : 11900. Bouguerius altitudinem montis Pichincha invenit hexap. 2435. Posita vero hac montis altitudine, & altitudine barometrica ad basim lin. 337, altitudo omnis in vertice fieret in priori quidem hypothesi densi-

tatum

tatum paulo minor lin. 190, & in altera paulo minor 193, quos inter numeros experimentum fere erat medium.

Corollarium IV.

Simili modo ſi altitudines barometricæ ad montem *le Puy de Dôme* ex Caſſini, Maſſiliæ, & in vertice montis *Mouſſet* ex Plantadii, atque ad pedes, & in vertice montis Pici Teneriffæ inſulæ ex notis Feuvillei experimentis aſſumantur; aeris homogenei, & montium altitudines juxta tres illas, quas indicavimus, proportiones denſitatum aeris & mercurii erunt in tabula ſequenti

	altitudo mercurii, ad pedes	in vertice		aeris homogenei,	montis.	Altitudo montis
le Puy.	lin. $324\frac{1}{2}$.	$285\frac{1}{2}$.	I.	hex. 4084.	$522\frac{3}{4}$.	juxta Caſſinum
			II.	$4206\frac{2}{3}$.	$538\frac{1}{2}$.	hex. 557.
			III.	4469.	572.	
Mouſſet.	338.	257.	I.	4254.	1235.	Caſſinum 1253.
			II.	4381.	1272.	Lambertum 1228.
			III.	4655.	1351.	Plantadium 1289.
Pici.	334.	209.	I.	4205.	1971.	Feuvilleum 2193.
			II.	4330.	2030.	Bougueriū 2054.
			III.	4600.	2157.	

Corollarium V.

Cum in priore obſervatione ad pedes montis Pichincha, & ad verticem inſtituta ſit log. $\frac{337}{191} = 0.2466$, atque in obſervationibus aliis ſit log. $\frac{324.5}{285.5} = 0.0556$ &c., manifeſtum eſt obſervatam montium altitudinem non adhuc accurate ſatis prodire quatuor notis prioribus, quæ differentiam eorumdem logarithmorum exhibent, hexapedarum numerum exprimendo, demendoque partem trigeſimam. Patet inſuper trigonometricas eorum montium menſuras cum inſtitutis calculis convenire quantum fert aliqua menſurarum earumdem incertitudo, præcipue vero diverſa ratio denſitatum aeris, & mercurii, quæ in calculis ipſis aſſumitur. Et

 cum

cum immutato caloris gradu aer, & mercurius diversimode condensetur, expandaturque, & alia fiat ratio densitatum, patet denique quod si in locis singulis instituto experimento altitudines barometricæ, & simul etiam hujusmodi ratio exploraretur, locorum eorumdem altitudines, aliorumque omnium, in quibus thermometri gradus, & aeris temperies maneret eadem, accurate supputari possent, altitudinem aeris homogenei inferiori loco incumbentis ducendo in differentiam logarithmorum altitudinis mercurii, quæ in inferiori, & superiori loco deprehenditur, & per logarithmorum modulum dividendo.

Corollarium VI.

Si instituto semel experimento pro data aeris, & mercurii temperie innotescat quæ loci unius supra alterum sit elevatio, auctaque postmodum ratione densitatis aeris, & mercurii in inferiori loco mercurius aliquantulum fiat altior, major etiam loci elevatio eadem priori regula supputabitur: & contra elevatio minor obveniet si manentibus omnibus ut antea in inferiori loco, in loco postmodum superiori altitudo mercurii augeatur. At cum ignotum sit qua ratione corpora & in primis aer vi frigoris, ac caloris condensetur, ac rarefiat, quæque pro aliis gradibus thermometri altitudinum correctiones addendæ, aut subducendæ sint; patet quod si in loco quovis proposito requiratur quot hexapedis ascendendum sit ut mercurii altitudo una linea in barometro deprimatur, eaque assumpta ratione densitatum illud observationum duarum tempus seligatur, in quo thermometri gradus pro superiori, & inferiori loco iidem maneant, altitudo quæsita accuratissime supputabitur. Ut si thermometro Reaumuriano gradus $16\frac{1}{4}$ supra glaciei limites indicante, & mercurio ad pollices 29, seu lineas 348 suspenso hexapedis 12.497 ascendendum sit ut mercurii altitudo fiat linearum tantum 347, ac sit propterea ratio densitatum aeris & Mercurii 1:10797.408, quod Clariss. de Luc prope Selevam Genevensem montem expertus est; cum sit log. $\frac{348}{347} = 0.0012497$, notæ quatuor priores differentiæ logarithmorum barometricæ alterius altitudinis, pro eodem, aut saltem proximis gradibus thermometri, expriment semper numerum hexapedarum, quibus loca alia quælibet supra locum propositum assurgent.

Co-

Corollarium VII.

Si altitudines barometricæ ſexdecimis lineæ partibus exprimantur, & ex ſerie omni obſervationum, quas ipſe D. de Luc in quindecim ſtationibus Selevæ ejuſdem montis accuratiſſime inſtituit, eæ ſeligantur, in quibus differentia graduum thermometri inferioris, ac ſuperioris a gradu jam indicato minor occurrebat, citra alias correctiones, locorum altitudines ſola priori regula eruentur ut in tabula ſequenti.

Stationum Ordo	Barometrum Inf.	Barometrum Sup.	Gradus Term. I. Inf. Sup.	Gradus Term. II. Inf. Sup.	Altitudo Supputata	Alitudo Obſervata	Differ. Obſerv.
I.	5182.	5141.	+3, +8.	$+1\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$.	ped. 207.	216.	+9.
II.	5182.	5098.	+3, +7.	$+\frac{1}{2}, +3$.	$425\frac{5}{6}$.	$428\frac{5}{6}$.	+3.
III.	5182.	5068.	+3, +7.	−2, +4.	$579\frac{3}{5}$.	586.	$+6\frac{2}{5}$.
IV.	5204.	5061.	+1, +3.	−1, −2.	726.	$728\frac{2}{3}$.	$+2\frac{2}{3}$.
V.	5217.	5035.	+8, +6.	$-1\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$.	925.	917.	−8.
VI.	5217.	4977.	+8, +6.	$-2\frac{1}{2}, +2$.	1227.	$1218\frac{2}{3}$.	$-8\frac{1}{3}$.
VII.	5163.	4891.	+4, +5.	0, +1.	1410.	1420.	+10.
VIII.	5198.	4850.	+8, +8.	$-1\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$.	$1605\frac{2}{3}$.	$1600\frac{1}{2}$.	$-5\frac{1}{6}$.
IX.	5198.	4821.	+8, +8.	$-2\frac{3}{4}, +1\frac{3}{4}$.	1961.	$1965\frac{1}{4}$.	$+4\frac{1}{4}$.
X.	5158.	4736.	+7, +5.	$-5\frac{3}{4}, +5\frac{3}{4}$.	2124.	2111.	−13.
XI.	5219.	4775.	+3, +4.	−6, +4.	2317.	2333.	+16.
XII.	5220.	4727.	+3, +3.	$-7\frac{1}{2}, +4$.	2585.	$2582\frac{1}{3}$.	$-2\frac{2}{3}$.
XIII.	5220.	4706.	+3, +3.	$-6\frac{1}{2}, +4\frac{1}{2}$.	2700.	2700.	0.
XIV.	5224.	4701.	+2, +4.	$-6\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$.	$2748\frac{2}{3}$.	$2742\frac{5}{12}$.	$-6\frac{1}{4}$.
XV.	5225.	4669.	+2, +3.	$-6, +\frac{1}{2}$.	$2931\frac{3}{4}$.	$2926.\frac{1}{2}$	$-5\frac{7}{12}$

Scholion I.

Tribus hiſce problematis perſtrinximus aliorum plurium illuſtrium operum præcipua capita. Theoremata, quæ in corollariis primi problematis attigimus, alia ratione a Newtono jam erant tra-

tradita in Propos. XXI., & XXII. Lib. II. Princip., atque ab Hermanno in Propos. XXVI. Phoronomiæ. Paradoxa, quæ ex formulis altitudinis barometricæ, & densitatis aeris, atque ex quibusdam gravitatis hypothesibus videntur consequi, problemate generaliter evoluto ingeniose exposuerat Cl. Fontana, qui in Ticinensi Universitate Matheseos Professor est, in specimine Analytico de altitudinibus barometricis. Casus præcipuos in Coroll. II., & III. Probl. II., & in Coroll. I. Probl. III. explanavimus: alias autem paradoxorum species, quæ formulis citra, & ultra centrum inter se comparatis prodeunt, jam in priori Cosmographiæ parte præoccupavimus cum §. X. Introductionis monuimus universim legem physicam gravitatis potestate ordinis paris distantiæ a centro citra, & ultra centrum ipsum simul exprimi analytice non posse. In corollariis etiam theorematum præcedentium, atque in Opusculo de resolutione æquationum tertii gradus, quod To.IV. Academiæ Senensis legitur, exemplis aliis ostendimus, quæ vocant paradoxa analytica inde tantum exsurgere, quod extra casus, atque hypotheses in problematum solutione primum assumptas ultimo prodeuntes formulæ aliquando applicentur.

At physica etiam Aerometriæ totius pars, Philosophorum ingenium diu exercuit. Cum primum enim Barometrum antliæ aspiranti, & mercurium aquæ substituit Torricellius, qui mercurii altitudinem in locis clausis, apertisque eamdem esse, atque imminente pluvia, aut tempestate aliqua utrobique minorem fieri observarunt, opinati sunt mercurii suspensionem ex vi elastica aeris pendere, eaque pluvio, vel procelloso tempore imminuta mercurium in barometro aliquantulum subsidere. Alii hypotheses alias excogitarunt, aut dubitarunt utrum sufficiens aliqua totius phænomeni explicatio afferri posset. At vero ex Hydrostaticæ elementis constat fluidorum omnium pressionem juxta quascumque lineas, rectas, obliquasque æqualiter propagari: pressionem neque ex elasticitate partium, neque ex absoluto pondere columnæ dato loco incumbentis, sed ex densitate tantum, atque ex altitudine maxima cujusque fluidi pendere: dataque altitudine, & densitate in fluido elastico, & non elastico pressionem eamdem esse. Suspensio igitur mercurii ex sola pressione aeris sic pendet, ut sublata etiam elasticitate, dataque altitudine, ac densitate, eadem adhuc in locis clausis, apertisque Barometri phænomena haberi debeant, ut a Cl. Melandro recte adnotatum est Part. IV. de Atmosphæra. Cumque ut vapores, qui antea pensiles sustinebantur, in pluviam recidant, aer ipse debeat rarescere, & minorem gravitatem specificam in loco dato sibi comparare; patet

etiam

etiam mercurii descensus pluvio, ac procelloso tempore eamdem caussam esse, quæ pluviæ, ac procellæ caussa est. Et cum insuper una mercurii linea digito circiter $1\frac{1}{7}$ aquæ respondeat, & variatio mercurii in barometris sæpius integrum pollicem exsuperet, quantitas autem pluviæ decidentis 30 circiter pollices apud nos exæquare soleat; patet etiam condensationis, ac rarefactionis caussas in aere potiores esse quamquæ adjectis, demptisque terrestribus vaporibus respondeant, & actione earumdem caussarum fieri quod defæcati, aeris major potius evadat densitas, ac pressio, & quæ inde oritur suspensi mercurii altitudo.

Elasticitati aeris Daniel Bernoullius Sect. X. Hydrodinamicæ id etiam tribuit quod vis pressionis in suspensum mercurium exercita æqualis sit ponderi non absoluto columnæ aereæ superimcumbentis, sed relativo tantum, quod definitur accipiendo quartum terminum proportionalem ad totam superficiem terrestrem, atmosphæræ totius pondus, & sectionem horizontalem mercurii in barometro suspensi. Eo etiam principio Bernoullius Cap. IV. de maris æstu usus est ut explicaret quanam ratione nulla in barometris variatio habeatur, quæ Solis, ac Lunæ viribus respondeat. Variationem absoluti ponderis invenit ipse 20 linearum mercurii: ostendemus autem inferius nonnisi 0.03 lin. esse posse. Illius principii demonstratio omnis huc redit, quod cum aeris elastici vires undique æquilibrari debeant inter se, singula etiam superficiei terrestris puncta undique æqualiter debent comprimi. At cum hæc generalis æquilibrii ratio minime efficiat quod in loco quocumque dato continuæ variationes altitudinis barometricæ non habeantur, quia scilicet turbatum semel æquilibrium non nisi diu, & continuis oscillationibus restitui potest; ita inæqualitas terrestris superficiei, montium, ac vallium interpositio, aeris frictio, & tenacitas, aliaque hujusmodi impedient ne in tot atmosphæræ vicissitudinibus sub polis, & æquatore, atque in locis aliis maxime dissitis medium illud æquilibrium haberi possit. Et plane altitudo media mercurii, & tota altitudinis variatio diversis in locis diversa est. Bouguerius altitudinem mediam in Peruvia ad libellam maris deprehendit 28 poll. 1. lin., variationesque intra lin. 2., aut 3. dixit consistere. Richerius 25, aut 30 hexapedis supra ipsam libellam altitudinem maximam invenit 27 poll. 1. lin. In plano Goreæ insulæ D.D. Varin, des Hayes, de Glos maximam altitudinem statuerunt 27 poll. $9\frac{1}{4}$ lin., minimam 27 poll. $6\frac{1}{4}$ lin. Januæ 20 hexap. supra libellam maris D. de Luc alti-

altitudinem mercurii invenit 28. poll. 1. $\frac{47}{64}$ lin. Petropoli est altitudo media pollicum Parisiensium 27.62, atque Upsaliæ 27.77, variationesque omnes intra lin. 1. $\frac{2}{3}$ consistunt, ut To. IX. Nov. Comment. Petropolitanæ Academiæ, & To. I. Academiæ Upsaliensis legitur.

Scholion II.

Sed etiam quæ in hypothesi gravitatis constantis ab Hallejo primum inventa est, altitudinis loci ex logarithmis altitudinum barometricarum supputandæ regula, ut cum institutis observationibus conciliari posset, diversimode Authores alios exercuit. Cassinus in Actis Academiæ Parisiensis anni 1733 suspicatus est densitatem aeris duplicatam potius quam simplicem ponderum comprimentium rationem sequi: secus ac ferant, in compressionibus saltem non ita magnis, notissima Mariotti experimenta. Bouguerius in Actis anni 1753 satis esse censuit si ex notis, quæ differentiam logarithmorum exprimunt, trigesima pars demeretur: quod tamen conciliandis observationibus non adhuc sufficit, ut in Coroll. IV. Probl. III. adnotatum est. D. de Luc, cum Barometro, ac Thermometro accuratissime constructo observationum instituendarum methodum perfecisset, practicas regulas addidit, quarum ope altitudines locorum ex barometricis altitudinibus supputatæ, accuratius possent corrigi. Ac primum ipse ad æstimandam temperiem mercurii in barometro suspensi Thermometro Reaumuriano usus est, in quo ab aqua ebullienti ad glaciem usque non quidem 80 sed 96 gradus numerabantur: in quo scilicet glaciei gradus erant — 12, aquæ ebullientis + 84. Deinde ad æstimandam aeris temperiem thermometro alio usus est, in quo ab aqua ebullienti ad glaciem usque habebantur gradus 186, & in quo gradibus illis $16\frac{3}{4}$ experimenti fundamentalis, in Coroll. VI. Probl. III. recensiti, gradus 39 respondebant. Tum binas observationum corrigendarum regulas tradidit: primam, ut pro singulis gradibus prioris Thermometri infra, aut supra 0, qui erat experimenti ejusdem locus, addatur, aut subducatur $\frac{1}{16}$ lineæ ex observata altitudine mercurii: secundam, ut accepta logarithmorum differentia, pro singulis gradibus alterius Thermometri, in inferiori, ac superiori loco, infra, aut supra divisionis initium deprehensi, ex altitudine supputata partes totidem bis millesimæ demantur, vel addatur. Hisce regulis observator diligentissimus locorum altitudines sic correxit, ut in singulis observationibus vix aliquando error 20 pedum prodierit, medioque accepto

pto in tribus prioribus ſtationibus error $14\frac{7}{12}$, $6\frac{2}{3}$, & 6 pedum, in aliis vero duodecim ſtationibus 4 dumtaxat ſuerit, nec niſi magis inde aberraverint obſervationes, quæ circa ortum Solis ventoſo aere inſtituebantur. Vidimus autem intra eoſdem limites, intra quos ſcilicet ne ipſæ quidem trigonometricæ altitudinum menſuræ ſatis certæ eſſe poſſunt, ſine ullis aliis correctionibus optime conciliari obſervationes, quæ ad eamdem exploratæ ſemel denſitatis aeris, & mercurii temperiem propius accedebant. Generatim cum ob ignotam actionem frigoris, ac caloris nihil aliud hacce in re certo conſtet quam quod imminuta ratione denſitatis aeris & mercurii major loci elevatio ex iiſdem altitudinibus barometricis colligatur, cumque agatur ſemper de correctionibus non ita magnis, ad calculum accuratius, & certiſſime inſtituendum præſtaret primo obſervationum tempus illud ſeligere, in quo ſuperioris, & inferioris loci temperies non admodum diverſa eſſet, ac deinde altitudinibus barometricis utriuſque loci obſervationem aliam adjicere elevationis ſupra inferiorem locum, quæ ad lineæ unius mercurii differentiam requiritur, quæque & rationem denſitatum, & ſeriem totius calculi accuratiorem ſuppeditaret.

Scholion III.

Eadem caloris, frigoris, & variationum hujuſmodi aliarum ratio in iis etiam Clarſs. Prieſtley experimentis habenda eſſet, quibus melior aeris ſpirabilis conſtitutio ex majori quantitate communis, ac nitroſi aeris explorari ſolet, quæ mixtione, & fermentatione ſolvitur, quæque aerem reſiduum, ut cum atmoſphæra omni æquilibretur, ad minus volumen, atque ad priorem fere gravitatem ſpecificam reduci ſinit. Atque ut indicem quid de hoc etiam experimentorum genere cenſuerim, in primis ipſum Prieſtley Aerometrum videtur ſic poſſe perfici, ut ſimplicitate ſua aliis omnibus hujuſmodi inſtrumentis præſtet: ſi ſcilicet tubo ad Barometri formam conſtructo, demptoque ſuperius aere, ex inferiori parte, quæ infra ſtagnantis aquæ, aut mercurii ſuperficiem demerſa ſit, binis vaſculis recurvis, datam rationem inter ſe habentibus, communis, nitroſuſque aer affundatur, eoque altius avolante, & ex parte etiam ſoluto, aqua, aut mercurius in tubo ad datam uſque altitudinem deprimatur. Deinde in his ipſis experimentis aquæ mercurium non iis tantum rationibus anteponerem, quibus in Barometri etiam, ac Thermometri conſtructione mercurio ſolemus uti, ſed inſuper quia magnam aeris copiam ab aqua, nullam a mercurio abſorberi ex re-

petitis Prieſtley experimentis conſtet, .atque ita variis mercurii ſuſpenſi gradibus unicum tantum elementum metiendum ſit, ſolutionis ſcilicet aeris, quæ ſit in ſuperiori parte, & quæ variis reſpirabilitatis gradibus reſpondere intelligitur. Mercurio etiam adhibito variationes graduum ſatis ſenſibiles eſſe debent. In eo enim Prieſtley experimento, in quo duabus tertiis partibus communis aeris cum una tantum nitroſi aeris intra mercurium permixtis volumen aeris totius ſuperſtitis, & in æquilibrio compoſiti erat $\frac{2}{3} + \frac{1}{7}$; vires elaſticæ ſub toto priori volumine, ante & poſt commixtionem, debebant eſſe ut 21 : 17; quæ differentia altitudini mercurii pollicum $5\frac{1}{7}$, aquæ vero plus quam *6* pedum reſponderet: pondus autem ſoluti aeris, & utcumque aut tubi lateribus, aut ſuperficiei mercurii adhærentis debebat eſſe $\frac{4}{21} \cdot \frac{1}{11900}$, ſeu $\frac{1}{61650}$ ponderis mercurii ſub æquali volumine contenti, nec priorem illam altitudinum differentiam ſenſibiliter variare poterat. Experimentum, cum in mercurio inſtitutum ſit, dubitationes omnes præcludit quod aquæ mercurius ipſe ſubſtitui debeat. Ex præcedenti autem experimenti totius proſpectu manifeſta ſit ratio phyſica, & analyſis phænomeni, quod hucuſque minus proprio vocabulo conſummationis, & deſtructionis aeris appellari conſuevit. In alio etiam experimento defectus nonæ partis permixti aeris differentiam pollicum $3\frac{1}{9}$ altitudinis mercurii exhibuiſſet. At vero in experimentis hiſce omnibus cum non varia tantum frigoris, ac caloris, ſed humiditatis etiam, ac ſiccitatis ratio ſolutionem aeris, & ſuſpenſionem mercurii variam poſſit efficere, neque ulla ſuppetat methodus, qua variationes omnes hujuſmodi ad certam regulam deducantur, ut rectius gradus ſinguli inter ſe comparari poſſint, præſtaret experimenta illa ſeligere, quæ paribus aliis circumſtantiis inſtituerentur Barometri, Termometri, atque Hygrometri. Inſuper cum nitroſus aer ex diverſis metallicis corporibus diverſo tempore, atque arte eductus diverſa vi pollere debeat, in primis curandum eſſet ut idem ſemper nitroſus aer ad experimenta omnia adhiberetur. Et cum admodum ſit difficile tot ſimul pares circumſtantias componere, difficilius etiam erit experimenta hujus generis ad eamdem Barometricæ, aut Thermometricæ alicujus obſervationis diligentiam perducere. Quia vero, antequam hæc edantur, experimenta alia inſtituendi non adhuc otium ſuperfuit, adjiciam hoc in loco quod pro ſingulis gradibus ſolutionis, & reſpirabilitatis aeris ex mercurii altitudine rectius æſtimandis ſubſidium ex Geometria, atque Analyſi peti poteſt.

Sit

Sit longitudo tubi A, pars longitudinis, quam intrusus aer seorsim occupare posset B, altitudo mercurii educto aere suspensi C, altitudo vero, ad quam ea portione aeris superius affusa reduci posset D. Quia differentia ponderum mercurii $C - D$ exæquare debet vim elasticam voluminis B aeris in volumen $A - D$ expansi, erit $C - D = \frac{B}{A - D} \cdot C$. Quo jam problema altitudinis D definiendæ ad eamdem hyperbolæ intra asymptotos constructionem reduceretur, quam exhibuit Hermanus in Propos. XXIV. Lib. II. Phoronomiæ. Quæ vero inde emergeret æquatio $D = \frac{1}{2}\left(A + C - \sqrt{(A-C)^2 + 4BC}\right)$ ad aliam pariter reduci posset, quam Jacobus Bernoullius exposuit in tractatu de gravitate ætheris. Reassumpta vero priori æquatione fieret $B = \frac{\overline{A - D} \cdot \overline{C - D}}{C}$: & si volumen aeris B minueretur quantitate E, & altitudo D quantitate alia F, esset similiter $B - E = \frac{\overline{A - D - F} \cdot \overline{C - D - F}}{C}$: atque inde erueretur

$$E = F \cdot \left(1 + \frac{A - 2D - F}{C}\right) = \frac{F}{C} \cdot \left(\sqrt{(A - C)^2 + 4BC} - F\right).$$

Hoc posito si in Priestleyanis experimentis assumamus salubritatem aeris, seu potius meliorem aeris aptitudinem ad respirandum, proportionalem esse quantitati E, qua volumen integrum B communis, ac nitrosi aeris simul permixti, ut ad priorem gravitatem specificam, & vim elasticam redeat, imminuitur, salubritas eadem non erit in ratione simplici differentiæ F altitudinis mercurii, nisi quamdiu differentia hujusmodi satis exigua censeri possit. Et si divisionis initium assumamus illud, in quo volumen aeris B imminutionem nullam subit mixtione, & fermentatione, ut ubi volucrum respiratio omnino deficit, & ubi propterea mercurius permixto aere nequit ascendere; salubritatis gradus augebuntur in minori ratione, quam mercurii altitudo supra limitem illum excrescat. Generatim etiam ab altitudine illa incipiendo, quæ in scala assumpta unitatis loco est, si gradus etiam salubritatis unitate exprimatur, pro casu alio quolibet proposito erunt gradus E ut $F \left(\frac{C + A - 2D - F}{C + A - 2D - 1}\right)$.

Hoc posito Geometrica Problematis constructio circuli ope exhiberi poterit. A casu autem simpliciori exordiendo, in quo scilicet volumen intrusi aeris exæquet interiorem tubi capacitatem, & sit propterea D=o, erit E ut $F.\left(\frac{A+C-F}{A+C-1}\right)$: & si insuper longitudo tubi æqualis sit altitudini mercurii in barometris suspensi, scilicet sit pollicum circiter 28, salubritatis gradus proportionales erunt quantitati $\frac{F}{55}.\left(1-\frac{1}{56}F\right)$: atque ita si exempli loco altitudo F decies augeatur, salubritas aeris, seu potius melior ad respirationem dispositio non augebitur nisi vicibus $8\frac{4}{11}$.

CAPUT SECUNDUM.

DE LIMITIBUS, ET FIGURA ATMOSPHÆRÆ.

PROBLEMA IV.

INvenire limites altitudinis, ad quam usque atmosphæra cujusvis Planetæ extenditur.

In primis si requiratur quos limites atmosphæræ Planetam aliquem circumambienti permittat Planetæ alterius attractio; sit M:1 ratio massarum Planetæ utriusque, & eorumdem distantia vocetur a, ac prioris Planetæ radius accipiatur pro unitate. Erit $\frac{M}{x^2}$ particulæ cujusvis gravitas in ipsius centrum ad distantiam quamcumque x, & vis omnis, qua eadem particula actione Planetæ alterius distrahetur ab ipsius centro, erit $\frac{1}{(a-x)^2}-\frac{1}{a^2}$. Binis igitur viribus inter se æquatis, limes ultimus altitudinis, ultra quem fluidum a priori Planeta in alium debet abripi, invenietur posito

$$x^4-2ax^3+Ma^2x^2-2Ma^2x+Ma^4=o.$$

Deinde si requirantur limites densioris fluidi, quod a stratis omnibus inferioribus dato tempore in motum agi, & ad eamdem an-

angularis motus rationem componi potest; sit $g:1$ ratio gravitatis ad vim centrifugam sub æquatore Planetæ cujuslibet propositi, & ad distantiam quamcumque x sit gravitas $\frac{g}{x^2}$, vis autem centrifuga sit x. Binis viribus rursus æquatis limes alius, ultra quem vis centrifugæ excessu fluidi particulæ circa eumdem Planetam consistere amplius non possent, habebitur posito $x = g^{\frac{1}{3}}$.

Denique cum logarithmis Briggianis sumptis, & posito $n = 2$, juxta Coroll. I. Probl. II., & Coroll. II. Probl. III. esse debeat $\log. \frac{D}{\pi} = \frac{0.4343 . rz}{A.(r+z)}$, sive etiam $z = \frac{Ar . \log. \frac{D}{\pi}}{0.4343 . r - A. \log. \frac{D}{\pi}}$; si notum sit ad quem usque terminum fluidi particulæ, ponderibus deficientibus expandi possint, habeaturque valor ultimus $\log. \frac{D}{\pi}$, patebit etiam qui atmosphæræ sensibilis sint limites.

COROLLARIUM I.

Si in priori casu hujus problematis ratio $x:a$, & $M:1$ adeo sit parva, ut possint negligi potestates altiores distantiæ x, & producta Ma^2x^2, $2Ma^3x$; supererit $Ma^3 = 2x^3$, ac fiet $x = a\sqrt[3]{\frac{1}{2}M}$. Ita si distantia mediocris Terræ, & Lunæ assumatur semidiametrorum 60, & sit ratio massarum $62.8:1$; erit semidiametrorum circiter 10 distantia a Lunæ centro, ultra quam ob potiorem Terræ attractionem fluidum omne a Luna deberet distrahi. In aliis Planetis latiores adhuc essent hujusmodi limites, quos atmosphæris attractio mutua relinqueret.

COROLLARIUM II.

In altera vero formula si substitutis aliis denominationibus Coroll. II. Probl. VIII. Lib. II. gravitas sub Planetæ æquatore se habeat ad vim centrifugam ut $R^3:T^2$, fiet $x = \frac{R}{T^{\frac{2}{3}}}$. Ita altitudo atmosphæræ densioris paulo ultra binos semidiametros Jovis in Jove ipso extendi poterit: in Sole vero esset limes hujusmodi semidiametrorum terrestrium $22918 \left(\frac{25\frac{1}{2}}{365\frac{1}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}$, scilicet plusquam 3800.

In

In terrestri æquatore cum gravitas ad vim centrifugam se habeat ut $288\frac{1}{2} : 1$, fiet limes ultimus aeris densioris plusquam sex terrestrium semidiametrorum. In hisce autem altitudinibus manifestum est longe rarius, ac subtilius fluidum omne esse oportere, quam ut eamdem angularis motus velocitatem finito tempore a stratis inferioribus recipiat.

Corollarium III.

Quia mercurius in barometro ad 28 pollices suspensus, ope antliæ Pneumaticæ, ad trientem usque unius lineæ potest deprimi, cumque ita aer omnibus artis subsidiis non nisi millies circiter rarefiat, ubi statuamus hunc esse extremæ rarefactionis limitem, atque in tertia problematis hujus formula fiat log. $\frac{D}{\pi} = 3$, & altitudo aeris homogenei A assumatur hexapedarum 4343, prodibunt hexapedæ 36432, seu milliaria circiter $47\frac{2}{3}$ pro tota illa altitudine, ultra quam fluidi aerei densitas propius ad ætherem accedet, & nulla amplius circa Terram atmosphæra sensibilis supererit. Hæc autem tanta altitudo vetat ne atmosphæram omnem ex solis aqueis, aut terrestribus vaporibus fuisse initio genitam censeamus.

Problema V.

Dato quod vis centrifuga sit directe ut distantia ab axe, gravitas autem reciproce ut quadratum distantiæ a centro, atmosphæræ totius figuram determinare.

Exhibeat ADHB figuram atmosphæræ nucleo solido $adbb$ affusæ, fig. 38., ac sit $QO = z$, $QL = x$, $QV = y$, $Oa = r$, atque in puncto quocumque Q sit gravitas $\frac{gr^2}{z^2}$, vis centrifuga $\frac{x}{r}$, atque ea vis centrifugæ portio, quæ opponitur gravitati $\frac{x^2}{rz}$. Cum sit $\frac{x^2}{z^2} =$ sin. QOD^2, erit vis omnis, quæ ex Q in O dirigetur $\frac{gr^2}{z^2} - \frac{z}{r}$. sin. QOD^2: & cum acceptis summis virium omnium hujusmodi, ob partium omnium æquilibrium quantitas constans haberi debeat, si, posito sin. $QOD = 0$, fiat $z = DO = C$, scilicet si minor atmosphæræ semiaxis vocetur c, prodibit

gr^2

$$\frac{gr^2}{z} + \frac{z^2}{2r}.\text{ fin. QOD}^2 = \frac{gr^2}{C}, \text{ five } \frac{z^2}{2gr}.\text{ fin. QOD}^2 = \frac{r^2 z}{C} - r^2,$$

vel etiam $\frac{x^2 z}{2gr} = \frac{r^2 z}{C} - r^2$. Eſt autem $z = \surd(x^2 + y^2)$, atque in hypotheſi vis centrifugæ proportionalis diſtantiæ ab axe eſſe debet $AO = rg^{\frac{1}{3}}$, & poſito $x = z = rg^{\frac{1}{3}}$ ex æquatione ipſa $\frac{x^2 z}{2gr} = \frac{r^2 z}{C} - r^2$ ſemiaxis minor DO, ſeu C eruitur $= \frac{2}{3} rg^{\frac{1}{3}}$.

Factis itaque hiſce aliis ſubſtitutionibus habebimus

$$(3g^{\frac{2}{3}} r^2 - x^2)^2 . (x^2 + y^2) = 4g^2 r^6$$

$$y = \pm \surd\left(\left(\frac{2gr^3}{3g^{\frac{2}{3}} r^2 - x^2}\right)^2 - x^2\right).$$

Corollarium I.

Cum itaque x^2 nunquam ſit major quam $g^{\frac{2}{3}} r^2$, abſciſſæ cuilibet negativæ, ac poſitivæ utrimque binæ ſemiordinatæ reſpondebunt, & atmoſphæra omnis non niſi ovalis alicujus in ſe redeuntis formam præſeferet, eritque extrema ſemiaxium proportio $rg^{\frac{1}{3}} : \frac{2}{3} rg^{\frac{1}{3}}$, ſeu $3:2$. Ita vero cum utriuſque ſemiaxis quantitas non quidem ex denſitate fluidi, ſed tantum ex diſtantia illa pendeat, in qua gravitas ſemper decreſcens æqualis ſit vi centrifugæ, & cum inſuper quæ inferiora ſtrata, ac concentrica partibus ſingulis æquilibrantur, aucta etiam denſitate, & neglecta attractione partium in æquilibrio manere debeant; manifeſtum eſt locum adhuc habere hæc omnia ſi atmoſphæræ totius denſitas recedendo a Planetæ centro in data quavis ratione augeatur. Neque aliæ prodirent formulæ ſi ratio etiam haberetur impulſionis radiorum luminis, cujus intenſitas eamdem ſequitur legem gravitatis, ſcilicet duplicatam reciprocam diſtantiarum.

Corollarium II.

At vero cum, juxta corollarium ſecundum problematis antetecedentis, exæquatis contrariis viribus longe major atmoſphæræ altitudo, & particularum omnium raritas prodeat quam ut eumdem angularem motum a ſtratis inferioribus recipiant; patet eaſ-

dem

dem formulas ad phyſicam atmoſphæræ cujuſvis theoriam nullibi conferre poſſe. Cum tamen aliquis ſemper motus continuo affrictu partium contiguarum ab inferioribus ſemper ad ſuperiora ſtrata tranſire debeat, cumque aucto motu, ac vi centrifuga imminui primo particularum pondus, ac demum particulas ipſas diſperdi neceſſe ſit; inde potius phyſica ratio deduci poterit earum omnium variationum, quæ in ſuprema atmoſphæræ Solis regione obſervari ſolent, & quas libri hujus initio recenſuimus.

Corollarium III.

Scilicet ſi ultra orbitas Mercurii, & Veneris ſtatuamus adhuc aliquem motum a ſuperficie Solis, atque intermediis fluidi undique affuſi ſtratis tranſire, atmoſphæra Solis circa æquatorem latius ſe expandet, atque ob majorem differentiam ſemiaxium reflexis ad Terram radiis lenticularem potius quam ſphæroidicam figuram referet. Hoc ipſo etiam atmoſphæræ denſitas, ac vis luminis, paribus aliis circumſtantiis, in ſuprema regione augebitur. At ubi eam vim centrifugam, quæ gravitatem ſuperet, conceperint partes ſingulæ, huc illuc diſperdentur, & zodiacale lumen coarctari videbitur, quouſque novo incremento motus, ac vis centrifugæ fluidum ſub æquatore aſſurgat altius, atque ad polos hinc inde aut fiat depreſſius, aut aliunde reficiatur.

Problema VI.

Figuram atmoſphæræ terreſtris, & rationem ſemiaxium determinare.

Cum altitudo atmoſphæræ ſenſibilis, juxta Coroll. III. Probl. IV., præ toto Telluris radio exigua ſit, reaſſumi poterunt binæ formulæ Theor. II. & III. Lib. IV.: & cum inſuper fractio $\frac{1}{n}$, quæ rationem mediæ denſitatis aeris, & terræ exprimit, negligi poſſit ob parvitatem; ſi minor atmoſphæræ ſemiaxis vocetur C, & b ſit differentia ſemiaxium terreſtrium, B vero differentia ſemiaxium atmoſphæræ, quæ ex motu diurno oritur, fiet $\frac{B}{C} = \frac{1}{2g} + \frac{3b}{5C}$.

Quod ſi igitur pro ratione $\frac{b}{C}$ aſſumamus quantitatem $\frac{5}{4g}$, quæ juxta Probl. VIII. Lib. II. obſervationibus proxime reſpondet, prodibit $\frac{B}{C} = \frac{5}{4g}$: ſcilicet oblata ſphærois, in quam vis centrifugæ actio-

actione denfior atmofphæræ pars conformabitur, folidæ terræ erit fimilis, eademque utrobique habebitur proportio femiaxium. Quod fi infuper fpectata Solis, ac Lunæ actione, juxta Probl. VII. Lib. II. fub Luna, ac Sole refidua vis in centrum fit $g - 2P$, atque in locis quadrante integro hinc illinc diffitis fit $g + P$, & gravitas acceleratrix ad totam vim perturbatricem fe habeat ut $g : 3P$; quæ inde orietur differentia femiaxium fphæroidis oblongæ erit $\frac{3P}{2g} + \frac{3b}{5C}$: fcilicet in plano æquatoris, ubi gravitas femper eft eadem, differentia hujufmodi evadet $\frac{3b}{2g}$, & in meridiani plano $\frac{3P}{2g} + \frac{3}{4g}$.

Corollarium.

Spectato etiam diurno motu cum differentia altitudinum atmofphæræ fub polis, & æquatore fit differentiis femiaxium terræ fluidæ, & homogeneæ, ac virium acceleratricium proportionalis, utrobique columnæ aeris erunt in æquilibrio. At cum fpectata Solis, ac Lunæ actione fit ratio virium fub æquatore $1 : 1 + \frac{3P}{g}$, & ratio altitudinum $1 + \frac{3P}{2g} : 1$; abfolutum pondus columnæ aereæ ad differentiam ponderis, quæ eadem actione gignitur, fe habebit ut $1 : \frac{3P}{2g}$. Cum itaque aeris denfitas prope terreftrem fuperficiem ad denfitatem aquæ fe habeat ut $1 : 850$ circiter, & aquæ denfitas ad mercurii denfitatem ut $1 : 14$; differentia ponderum ob vim Solis exæquabit $\frac{1}{108}$ unius lineæ mercurii, & $\frac{1}{48}$ ob vim Lunæ: quæ binæ fimul quantitates in barometris etiam accuratiffime conftructis fenfibiles nequeunt evadere.

Scholion I.

In Probl. V. atmofphæræ figuram ex limitibus altitudinis fic deduximus ut rami omnes excurrentes ad infinitum, & cafus alii ramorum duplicium præcluderentur, quos D. Mairan in tractatu de Aurora Boreali enumeraverat. In pofteriori autem problemate indicatis limitibus atmofphæræ fenfibilis oftendimus nullam fenfibilem variationem ex Solis, ac Lunæ viribus oriri poffe. Neque ullæ

 fatis

ſatis certæ obſervationes afferri poſſunt, quæ pro vario Solis, ac Lunæ loco datam aliquam altitudinis columnæ aereæ, & mercurii in barometris ſuſpenſi differentiam exhibeant. Utique D. Lambertus obſervationibus annorum undecim Norimbergæ habitis altitudines mercurii in apogæo Lunæ majores plerumque invenit quam in perigæo, licet ſummam exceſſuum in priori caſu invenerit minorem ſumma defectuum in caſu altero. Obſervationibus etiam per annos 36 ab illuſtri Poleno habitis, & poſt ipſius obitum per annos 12 continuatis, comparatiſque inter ſe invicem oſtendit Clariſs. Toaldus numerum exceſſuum altitudinis apogææ ad numerum defectuum in perigæo ſe habuiſſe ut 31 : 17, mediam autem totius exceſſus quantitatem per annos omnes 48 diſtributam fuiſſe dimidiæ lineæ pedis Londinenſis. Simili modo exceſſum altitudinis mediæ in quadraturis Lunæ cum Sole ſupra altitudinem mediam in ſyzigiis invenit ſextæ partis unius lineæ. Alias etiam differentias deprehendit Sole in ſignis borealibus, atque auſtralibus conſtituto: & differentiam altitudinis mediæ, dum Sol in ſigno cancri, & capricorni eſt, conſtituit quartæ partis unius lineæ.

At neſcio utrum Barometrum a Poleno adhibitum tam accuratum fuerit ut obſervationibus annorum 48 ſimul collectis, additis, ſubtractiſque differentia dimidiæ, aut quadrantis lineæ certo emerſerit. Deinde ſi ſeries mediorum omnium exceſſuum, ac defectuum, ex quibus media illa differentia exſurgit, attente conſideretur, nullo certo ordine exceſſus illos, defectuſque ſe excipere patebit, ut nihil inde certo deduci poſſit. Ita ab anno 1725 ad 1732 differentia altitudinis barometricæ in apogæo, & perigæo Lunæ ſepties poſitiva, & ſemel negativa prodiit, eratque negativa hæc differentia — 1. 67, poſitivarum ſumma 37. 49, media ex omnibus + 4. 45. Ab anno autem 1741 ad 1748 differentia quinquies negativa fuit, ter poſitiva, erantque binæ ſummæ — 16. 23, & + 8. 48, ac media ex omnibus — 0. 97. At inſuper mediæ illæ quantitates non ſatis accurate in Polenianis experimentis videntur determinari. Ut enim ex diſſertatione Clariſs. Toaldi eruitur, altitudines barometricæ ſemel tantum diebus ſingulis a Poleno acceptæ ſunt. Quod cum ad quantitates medias inveſtigandas minime ſufficiat, indicandum erit qua methodo in experimentis hujus generis procedendum ſit ut certo aliquid poſſit colligi. Primo ſcilicet variationes altitudinis barometricæ adnotari debent omnino omnes: deinde adnotandum eſt tempus, quo variationes ſingulæ locum habent: ac denique pro variatione media non quidem medium arith-

me-

meticum ex ſingulis variationibus accipiendum eſt, ſed medium, quod exſurgit ſummam productorum omnium variationis cujuſque, ac temporis dividendo per ſummam temporum. Quæ quantitatis mediæ æſtimandæ methodus a Coteſio diſerte tradita, ut eam ſuperius etiam adhibuimus cum de terreſtrium graduum determinatione ſermo erat, in caſibus omnibus ſimilibus attendi univerſim debet. Et cum undique effectus cauſſis, obſervationeſque, ac phænomena generalibus naturæ legibus reſpondeant, minime dubitandum eſt quod ſi hac ipſa methodo variationes diurnæ, annuæ, periodicæ æſtimarentur nulla altitudinis barometricæ æquatio exſurgeret, quæ Solis ac Lunæ influxibus tribuenda eſſet.

Scholion II.

Ex poſteriori etiam corollario ſatis colligi poterit orientalem zonæ torridæ ventum ex Solis, ac Lunæ viribus non oriri. Licet enim iiſdem viribus & mare, & atmoſphæra ſphæroidis oblongæ figuram induat, & Sole, ac Luna a loco dato occaſum verſus declinantibus ſphæroidis vertex eodem ordine revolvi pergat, ac communis aliquis motus in ſuperioribus maris, & atmoſphæræ ſtratis ab ortu in occaſum excitari debeat, ut in Coroll. IV. Theor. III. Lib. IV. jam dictum eſt; non tamen inde ulla atmoſphæræ agitatio orietur, quæ ſit ſenſibilis. Conjunctis enim Solis, ac Lunæ viribus differentia altitudinis, ut modo vidimus, non niſi pedum $2\frac{1}{4}$ aeris homogenei eſſe poterit, eaque in ſuperiori ſphæroidis vertice libere circumvoluta ſenſibilem motum ad inferiora atmoſphæræ ſtrata, atque ad terreſtrem uſque æquatorem, circa quem vires omnes æquilibrantur, minime transferet: licet in ſuperficie marium differentia pedum $6\frac{1}{4}$, quæ viribus iiſdem gignitur, aucta ob poſitionem littorum, quibus aquæ continentur, ſenſibilem aquarum curſum ab ortu in occaſum excitet. In ſubſequenti eapite rurſus patebit quod cum adeo exiguus ſit motus omnis, quo primum ſingulæ particulæ ex ſphæra in ſphæroidem oblongam abierant, eumque adhuc minor debeat eſſe motus, quo ex ſphæroide una in propiorem aliam continue tranſeunt; æſtus omnis in atmoſphæra ob vires Solis, ac Lunæ genitus nihil omnino habere poteſt quod cum vi ac velocitate orientalis venti debeat comparari.

Analogiam æſtuum maris, & atmoſphæræ Cl. Alembertius propoſuit in diſſertatione de generali ventorum cauſſa, quæ anno 1746 Berolinenſe præmium obtinuit. Binas deinde hypotheſes alias protulit Daniel Bernoullius in diſſertatione, quæ anno 1751 retulit

præmium Parisienſe. Cenſuit enim §. VI. orientalem ventum oriri poſſe ex frictione ſtratorum ſuperiorum atmoſphæræ, aut ætheris circumpoſiti, quæ diurnum motum inferiorum ſtratorum libere ſequi non poſſint: quæ tamen ſuperiora ſtrata cum ſubtiliſſima, & tenuiſſima eſſe debeant, ne finito aliquo tempore ad eamdem angularis motus rationem cum Terra omni, ac ſtratis denſioribus componantur; ob tenuitatem ipſam ne quidem poterunt denſiorum ſtratorum motum orientem verſus conceptum ſic retardare ut motus aliquis ad occidentem prope terreſtrem ſuperficiem ſenſibilis habeatur. Deinde §. XXXI., & XXXVI. elementum aliud Bernoullius addidit caloris, & dilatationis: ita quidem ut cum aerem præcipue incaleſcere ſtatuiſſet ob multiplices reflexiones radiorum lucis, quæ fiunt prope terreſtrem ſuperficiem, quæque in majoribus altitudinibus uniformem aeris temperiem minime afficiunt; inferius aerem denſiorem, frigidioremque continue a polis ad æquatorem affluere dixit, & refici aere alio, qui in ſuperiori atmoſphæræ parte ab æquatore ad polos refluit. Quo dato aer ex circumpolari aliquo circulo ad parallelos alios tranſeundo, angularis motus defectu, utique occidentem verſus deflecteret: hæc vero omnis deflexio, & orientalis ventus inde ortus non prope tropicos dumtaxat, ſed per totam etiam temperatam zonam eſſet ſenſibilis, ubi velocitas diurni motus longe major eſt, quam qua novus aer e polis adveniret. Simili modo ſuſpicatus fuerat Mac-Laurinus in Propoſ. VII. de æſtu maris glaciales montes, qui ex boreali oceano digrediuntur, velocitatis diurnæ defectu, ad occidentalem oceani atlantici plagam copioſius affluere.

At inſuper quæ conſtans eſt caloris differentia, ab æquatore pergendo ad polos, diverſa aeris altitudine jam diu compenſari debuit, atque atmoſphæra in æquilibrio compoſita diurni tantum, ac nocturni caloris differentia ſupererit, qua elaſticitas particulæ cujuſque augeatur, imminuaturque alternis vicibus, & certo ordine, ac lege agitentur ſingulæ. Lex autem, atque ordo excurſionum aeris is eſſe debet. Quæ dato tempore Soli ſubſunt columnæ aeris calefieri, atque expandi debent: & cum recedente Sole rurſus frigeſcere, ac condenſari incipient, ad reficiendum elaſticarum virium æquilibrium novus aer non niſi ex boreali, atque auſtrali latere advenire poterit, atque ex aliis inſuper columnis, quæ diu a Sole orientem verſus relictæ ſint. Hoc dato orientalis ventus ſub zona torrida habebitur, atque hinc inde etiam eo tractu, ex quo aer affluens ad reſtituendum ſub zona torrida æquilibrium ipſum ſufficiet. Et quidem æquinoctii tempore in locis citra æquatorem poſitis aer ex oriente, & ſep-

ſeptentrione copioſius affluens compoſitam venti directionem ad occaſum ſimul, & meridiem convertet: ultra æquatorem vero aer affluens ex oriente, & meridie ad occaſum ſimul, atque ad ſeptentrionem dirigetur. Deinde ad tropicum cancri accedente Sole, ob calorem auctum in hemiſphærio ſeptentrionali minores fient vires aeris e ſeptentrione advenientis, & ventus ad orientalem propius accedet: in hemiſphærio autem meridionali, ob auctas meridionalis aeris vires, compoſita venti origo propior fiet tropico capricorni: ac demum mutata Solis declinatione, ultra æquatorem ventus ex æquatore ipſo, & citra æquatorem ex tropico cancri flare videbitur. Ita vero generales hujuſmodi variationes, aliis cauſſis extraneis non accedentibus, non niſi ex loco Solis pendebunt: cum Lunæ potius quam Soli reſpondere debeant, ſi ex Solis, ac Lunæ viribus orientalis ventus oriatur. At ſingillatim modo videndum eſt quibus gradibus, ſive earumdem virium actione, ſive ratione diurni motus, & mare, & atmoſphæra in oblongam primum, atque oblatam ſimul ſphæroidem tranſierint.

CAPUT TERTIUM.

DE LEGE MOTUUM ATMOSPHÆRÆ.

PROBLEMA VII.

Si fluidum nucleo ſphærico circumfuſum aut actione virium perturbatricium, aut impreſſo motu rotationis in oblongam, oblatamve ſphæroidem tranſeat, fluidi totius motum definire.

Sit in fig. 39. QO radius ſphæræ, quæ Solis, aut Lunæ actione abit in ſphæroidem oblongam ABHD, & ſit ut antea $DO = C$, $AO = C + B$, $CO = C + B.s^2$, & quia ſphæræ ſoliditas $\frac{2}{3}p.QO^3$ æquari debet ſoliditati oblongæ ſphæroidis $\frac{2}{3}pC^2.\overline{C+B}$ ſit $QO = C + \frac{1}{3}B$, & $CQ = B.\overline{\frac{1}{3} - s^2}$. Sit inſuper $\frac{Cds}{\surd(1 - s^2)}$ elementum circularis arcus Qd, $pC.\surd(1 - s^2)$ peripheria, quæ deſcribitur a puncto C circa axem AH revoluto, & elementum ſolidi, quod revolutione ſpatii $DCQd$ gignitur, ſit $pB.(\frac{1}{3} - s^2).Cds$, ſolidum vero omne $\frac{1}{3}pB.C^2(s - s^3)$. Quia ob parvitatem virium perturbatricium, & ſphæræ, ac ſphæroidis affinitatem, dum ſphæra *abbd* in ABHD abit cenſeri poterit punctum Q in

in q transire, & rectam QR in qr; solidum illud, quod sphæræ deficiet, æquabitur solido revolutione spatii $CRrq$, aut $QRrq$ circa axem eumdem AH genito. At vero hujusmodi solidum æquale est pyramidi truncatæ, baseos $Qq \cdot pC \cdot \sqrt{(1-t^2)}$, altitudinis integræ QO, & differentiæ altitudinum RO: est scilicet idem solidum $\frac{1}{3} QO \cdot \left(1 - \frac{RO^3}{QO^3}\right) \cdot Qq \cdot pC \cdot \sqrt{(1-t^2)}$. Binis itaque solidis inter se æquatis eruetur spatium $Qq = \frac{B \cdot C^3 \cdot t \sqrt{(1-t^2)}}{C^3 - RO^3}$.

Quod si ratione diurni motus sphæra in aliam sphæroidem abeat, quæ revolutione ellipseos ABHD circa minorem axem DB gignitur, atque ut in Probl. V. Lib. IV. sit $QO = C + \frac{2}{3} B$, & $CQ = B \cdot (\frac{2}{3} - t^2)$, erit elementum solidi revolutione spatii $DCQd$ circa axem db geniti $pB \cdot (\frac{2}{3} - t^2) \cdot \frac{C t d t}{\sqrt{(1-t^2)}}$, & solidum omne erit $\frac{1}{3} p C^2 B t^2 \cdot \sqrt{(1-t^2)}$: quod cum æquari debeat solido $\frac{1}{3} QO \cdot \left(1 - \frac{RO^3}{QO^3}\right) \cdot Qq \cdot p Ct$ revolutione spatii $RQrq$ circa axem eumdem genito, eruetur similiter $Qq = \frac{B \cdot C^2 \cdot t \cdot \sqrt{(1-t^2)}}{C^3 - RO^3}$.

Corollarium I.

Si altitudo fluidi QR vocetur A, & præ toto nuclei solidi radio sit valde exigua, & sit quam proxime $RO^3 = C^3 - 3C^2 A$, fiet in casu utroque oblongæ, atque oblatæ sphæroidis $\frac{Qq}{C} = \frac{B}{3A} \cdot t \cdot \sqrt{(1-t^2)}$, atque ita spatium a particulis singulis percursum in data a minori axe distantia erit directe ut semiaxium differentia, & reciproce ut fluidi altitudo. At vero in casu oblatæ sphæroidis si gravitas ad vim centrifugam sub æquatore se habeat ut $g:1$, cum juxta præcedentes formulas esse debeat in maribus terræ solidæ circumfusis $\frac{B}{C} = \frac{5}{4g}$ circiter, & in atmosphæra $\frac{B}{C} = \frac{1}{2g}$; patet eamdem semiaxium differentiam, & spatium omne Qq non amplius ita exiguum, nec satis accuratam formulam posteriorem censeri posse.

Co-

COROLLARIUM II.

In casu oblongæ sphæroidis cum differentia columnæ aereæ, quæ junctis Lunæ, ac Solis viribus respondet, per Coroll. IV. Theor. III. sit pedum $2\frac{3}{4}$, & tota altitudo aeris homogenei esse debeat pedum 850.32; erit $\frac{B}{3A} = \frac{1}{29673}$, & cum $t\sqrt{(1-t^2)}$ nunquam sit major $\frac{1}{2}$, ratio $Qq : C$ nunquam major erit ratione $1:59346$, & spatium omne Qq a particulis aeris percursum, dum Sole, & Luna a loco quovis proposito declinantibus, aliisque viribus agentibus redeunt ad æquilibrium, nunquam majus erit hexapedis 55. In mari spatium hujusmodi majus erit, & quod altitudo æstuantis maris sit major pedibus $6\frac{1}{4}$, & quod media aquarum profunditas minor esse debeat pedibus 27200, qui altitudinem aeris homogenei definiunt.

COROLLARIUM III.

Patet autem quod cum particulæ aquæ, aut aeris continua perturbatricium virium actione impellentur ex Q in q, & ex R in r, ibi minime quiescent, sed motu continue retardato ultra impellentur per spatium aliud priori æquale, ac postmodum redibunt ex r in R, pluresque oscillationes concipient eundo, & redeundo, quousque ob tenacitatem, & frictionem partium singularum oscillationes semper minores fiant, ac denique particula quævis R quiescat in loco r. Et quidem oscillationes illas, quæ ex vi centrifuga diurni motus similiter oriri poterant, jam diu desiisse oportet, cum quæ ob varias Solis, ac Lunæ vires oriuntur, diebus singulis reverti debeant.

PROBLEMA VIII.

Iisdem positis definire tempus quo fluidum ex sphæra in oblongam sphæroidem transit.

Cum positis omnibus quæ antea sit $\frac{Qq}{C} = \frac{B}{3A} . t\sqrt{(1-t^2)}$, si fluidum a superficie sphæræ da recedendo in superficiem sphæroidicam $d'a'$ abire incipiat, & differentia semiaxium Oa', Od' sit $B-b$, eruetur similiter $\frac{Qq'}{C} = \frac{B-b}{3A} . t\sqrt{(1-t^2)}$, eritque $\frac{q'q}{C} = \frac{b}{3A} . t\sqrt{(1-t^2)}$. Jam vero cum in hypothesi nuclei

sphæ-

ſphærici vis perpendicularis axi in puncto q ſit $\frac{6B.t}{5C}+(1+\Delta).\frac{3Pt}{g}$, eaque in caſu æquilibrii, juxta Theor. III., ad ſubtangentem $2B.t$ ſe habere debeat in conſtanti ratione $1+\Delta:C$, ſi vis perpendicularis axi in puncto q^1 eſſet $\frac{6(B-b).t}{5C}+(1+\Delta).\frac{3Pt}{g}-\frac{b}{B}.(1+\Delta).\frac{3Pt}{g}$, quarta ſcilicet proportionalis ad ſubtangentes binas $2Bt$, $2(B-b).t$, & priorem vim $\frac{6B.t}{5C}+(1+\Delta).\frac{3Pt}{g}$; eſſet pariter totum fluidum d^1a^1 in æquilibrio. Quare cum vis perpendicularis ſit $\frac{6}{5C}.(B-b).t+(1+\Delta).\frac{3Pt}{g}$ erit $\frac{b}{B}.(1+\Delta).\frac{3Pt}{g}$ vis, qua punctum q^1 nitetur longius ab axe db recedere, & quæ inde orietur vis perpendicularis radio ad centrum ducto erit $\frac{b}{B}.(1+\Delta).\frac{3Pt}{g}.\surd(1-t^2)$, proportionalis ſcilicet ſpatio q^1q.

Poſito autem quod vis ſit proportionalis diſtantiæ a puncto q, per Coroll. I. Theor. III. Par. I., tempus, quo particula Q in q feretur, æquale erit tempori, quo circularis quadrans radii Qq ob vim centripetam $(1+\Delta).\frac{3Pt}{g}.\surd(1-t^2)$ deſcribi poſſet. At per Coroll. I. Theor. II. tempus, quo quadrans circuli abſolvitur, eſt ad tempus deſcenſus per dimidium radium $\frac{1}{2}Qq$, eadem ſemper agente vi acceleratrice ut $\frac{1}{4}p:1$. Inſuper tempus deſcenſus per $\frac{1}{2}Qq$ eſt ad tempus, quo ſpatium H eadem vi abſolvi poteſt, ut $\surd\frac{1}{2}Qq:\surd H$, atque hujuſmodi tempus eſt ad tempus T, quo ſpatium idem H conſtanti vi gravitatis abſolvi poteſt ut $\surd(1+\Delta):\surd\left(\overline{1-\Delta}.\frac{3Pt}{g}.\surd\overline{1-t^2}\right)$.

Compoſitis igitur rationibus erit tempus totius tranſitus ex Q in $q=\frac{pT.\surd Qq.\surd(1+\Delta)}{4\surd 2H.\surd\left(\overline{1+\Delta}.\frac{3Pt}{g}.\surd\overline{1-t^2}\right)}$, & cum ſit $Qq=\frac{B.C.t.\surd\overline{1-t^2}}{3A}$,

& B=

& $B = \frac{3P.C}{2g} \cdot \frac{1+\Delta}{\frac{2}{5}+\Delta}$, reductis terminis fiet tempus quaesitum

$$\frac{pT.C}{8\sqrt{3A.H}} \cdot \sqrt{\left(\frac{1+\Delta}{\frac{2}{5}+\Delta}\right)}.$$

Corollarium I.

Tempus igitur, quo particulae aut aquae, aut aeris ob vires Lunae, & Solis ex sphaera in sphaeroidem oblongam abire poterant, erit directe ut $\sqrt{\left(\frac{1+\Delta}{\frac{2}{5}+\Delta}\right)}$, & reciproce in ratione subduplicata altitudinis maris, & atmosphaerae: & data altitudine, dataque ratione densitatum, etiam si vis perturbatrix P major, aut minor fiat, & alia evadat ipsius ratio ad gravitatem, semper idem manebit tempus totius transitus ex Q in q, & omnes fluidi ejusdem oscillationes erunt aequi diuturnae: ut etiam ex eo facile colligitur quod vires acceleratrices in punctis quibuslibet Q, q sint semper spatiis Qq, $q'q$ proportionales.

Corollarium II.

Si fiat $\Delta = 0$, hoc est si fluidum nucleo sphaerico circumfusum sit ipsi nucleo homogeneum, erit tempus quaesitum $\frac{pT.C}{8\sqrt{\frac{6}{5}A.H}}$;

& contra si fluidum sit adeo rarum ut ipsius densitas prae tota nuclei densitate negligi debeat, erit $\frac{pT.C}{8\sqrt{3A.H}}$ tempus, quo singulae particulae ferentur ex Q in q: integrae autem oscillationis tempus erit $\frac{pT.C}{4\sqrt{3A.H}}$: & tempora oscillationum in binis hisce hypothesibus fluidi aut homogenei, aut rarissimi inter se erunt directe ut $\sqrt{5} : \sqrt{2}$, & reciproce in ratione subduplicata altitudinis.

Corollarium III.

Si tempus T accipiatur minuti unius secundi, quo tempore spatium H uniformi vi gravitatis, & libero lapso absolutum est hexapedarum $2\frac{1}{2}$ circiter, cum aequatoris terrestris ambitus assumi possit hexaped. 20608920, & aeris homogenei altitudo A sit proxime hexap. $850.5\frac{1}{3}$; tempus omne, quo aeris particulae ferentur

ex Q in q, prodibit circiter horarum quatuor. Quare si Sol, & Luna in dato semper loco consisterent, particulæ aeris alternatim excurrere inciperent in contrarias partes tempore horarum octo: & cum excursionis integræ spatium, per Coroll. II. Probl. VII. nunquam sit major hexapedis 110; velocitas hujus alterni motus, etiam initio, longe minor esse debuit velocitate illius venti, qui intra Tropicos ab oriente in occidentem continue spirat, quique 8 circiter aut 10 pedes unius secundi tempore absolvit.

PROBLEMA IX.

Si aliquot medii elastici particulæ impulsu aliquo comprimantur primum, ac deinde se expandant, & particulas alias propiores comprimendo ad remotiores etiam eodem ordine motum transferant, & data sit medii densitas, atque elasticitas, invenire pulsuum velocitatem.

Sit BC filamentum aliquod medii elastici, fig. 45., quod impellatur utcumque in B, condenseturque usque ad C, ac se expandendo rursus eadem vi, qua fuerat compressum, succedentes alias particulas similiter in motum agat, & pulsum alterum excitet priori æqualem. Sint E, F, G tria puncta medii quiescentis ad æquales distantias EF, FG sita: Ee, Ff, Gg minima spatia, per quæ impulsu accepto transferuntur: ε, φ, γ intermedia punctorum eorumdem loca. Si elasticitas particulæ cujusque sit in ratione inversa voluminis, atque altitudo media aeris homogenei pondere suo æquipollentis naturali elasticitati vocetur A; elasticitas particulæ EF in $\varepsilon\varphi$ traductæ erit $A.\frac{EF}{\varepsilon\varphi}$, & elasticitas particulæ FG traductæ in $\varphi\gamma$ erit $A.\frac{FG}{\varphi\gamma} = A.\frac{EF}{\varphi\gamma}$, ac vis utriusque differentia, sive vis omnis motrix particulæ EF in loco ε erit $A.EF.\frac{\varphi\gamma - \varepsilon\varphi}{\varphi\gamma.\varepsilon\varphi}$, vis autem acceleratrix $A.\frac{\varphi\gamma - \varepsilon\varphi}{\varphi\gamma.\varepsilon\gamma}$. Insuper si spatium omne Eε vocetur S, & elementum ipsius $\varepsilon\varphi$ sit dS, & $\varphi\gamma$ sit $dS + ddS$; erit ddS differentia duorum elementorum spatii $\varphi\gamma$, $\varepsilon\varphi$ sibi invicem succedentium, atque omissis quantitatibus aliis inferiorum ordinum erit vis eadem acceleratrix $A.\frac{ddS}{dS^2}$. Sunt autem vires acceleratrices directe ut velocitates genitæ, & reciproce ut tempora, quibus gignuntur: & velocitates sunt directe ut spatia uniformiter percursa, ac rursus reci-

proce

proce ut tempora. Quod si igitur sit t tempus, quo pulsus omnis transfertur ex B in C, dt elementum temporis quo spatium a pulsu absolutum quantitate ddS, ob vim acceleratricem $\frac{A.ddS}{dS^2}$, augeri uniformiter intelligitur, H spatium, quod ob constantem vim gravitatis, tempore T, & motu uniformiter accelerato a quiete incipiendo absolvi posset, & 2H spatium, quod eodem tempore velocitati ultimo acquisitæ responderet; vis acceleratrix $\frac{A.ddS}{dS^2}$ ad naturalem vim gravitatis se habebit ut $\frac{ddS}{dt^2} : \frac{2H}{T^2}$, & si gravitas ipsa exprimatur unitate fiet $\frac{dS}{dt} = \frac{\sqrt{(2H.A)}}{T}$, integrandoque erit pulsuum velocitas $\frac{S}{t} = \frac{BC}{t} = \frac{\sqrt{(2H.A)}}{T}$.

Corollarium I.

Velocitas pulsuum erit in ratione subduplicata altitudinis fluidi homogenei pondere suo elasticitati particulæ cujusque æquipollentis, sive etiam in ratione directa subduplicata elasticitatis fluidi, & subduplicata reciproca densitatis. Data autem elasticitate, & densitate, atque impulsus prioris quantitate utcumque aucta, vel imminuta, idem semper manebit tempus, quo excurret pulsus ex B in C, & particulæ EF, FG ferentur in ef, fg. Scilicet cum fluido in B compresso particulæ eædem accelerari primum usque in O, ac deinde iisdem gradibus retardari debeant; spatium omne EO, sive majus, sive minus sit, absolvetur semper eodem tempore: quod quidem cum esse nequeat nisi vires acceleratrices sint proportionales distantiis a medio vibrationis puncto O; pulsibus per fluidum elasticum propagatis, patet singulas fluidi particulas motu brevissimo euntes, & redeuntes accelerari, ac retardari pro lege oscillantis penduli.

Corollarium II.

Quia tempus T liberi descensus per altitudinem H est ad tempus descensus per $\frac{1}{2}$F dimidiam longitudinem penduli cycloidalis secundis singulis oscillantis ut $\sqrt{H} : \sqrt{\frac{1}{2}F}$, & tempus descensus per dimidiam longitudinem penduli est ad tempus unius secundi, quo

oſcillatio integra abſolvitur ut $1:\frac{1}{2}p$, erit $T = \frac{1''.\surd H}{\frac{1}{2}p.\surd\frac{1}{2}F}$, &

$\frac{t}{BC} = \frac{1''}{\frac{1}{2}p.\surd(A.F)}$: ac ſi fiat ut $t:1''$ ita ſpatium BC ad quartum, unius ſecundi tempore pulſus abſolvet ſpatium $\frac{1}{2}p.\surd(A.F)$: ac denique cum ſit $1''.\frac{\surd A}{\surd F}$ tempus oſcillationis penduli longitudinis A, & ſit $1:\frac{\surd A}{\surd F} = \frac{1}{2}p.\surd(A.F):\frac{1}{2}pA$, tempore unius oſcillationis penduli hujuſmodi pulſus abſolvet ſpatium æquale ſemiperipheriæ circuli radio A deſcripti.

Corollarium III.

Si concipi poſſet aeris filamenta uniformiter in particulis ſingulis expandi, ac condenſari, & puncto aliquo E in e tranſlato, fig. 46., ſit b terminus rareſactionis ex parte una, & c condenſationis ex parte altera; fluidum bE in be expanſum comprimi utrimque incipiet, & fluidum ec utrimque dilatari. Et cum ſatis exiguum ſit ſpatium Ee, ſectis be, ec biſariam in B, & C, ea erunt centra immobilia vibrationum fluidi: & ſi elaſticitas naturalis ut antea vocetur A, erit vis fluidi compreſſi $A.\frac{1}{\frac{1}{2}ec}$, expanſi vero $A.\frac{1}{\frac{1}{2}be}$, & differentia virium, ſeu vis omnis acceleratrix puncti e erit $\frac{1}{2}A.\frac{be-ec}{\frac{1}{4}be.ec}$, ſeu proxime $4A.\frac{Ee}{bE^2}$, proportionalis ſcilicet diſtantiæ a puncto E. Adhuc itaque punctum e motu continuo accelerato feretur ex e in E, ac deinde iiſdem gradibus retardabitur uſque in e^1, & vibrationes omnes hujuſmodi ampliores, brevioreſque abſolventur ſemper eodem tempore.

Corollarium IV.

In hac autem hypotheſi tempus unius ſemioſcillationis ex e in E æquale erit tempori, quo eadem aeris particula ob vim centripetam $4A.\frac{Ee}{bE^2}$ abſolveret quadrantem circuli radio Ee deſcripti. Tempus hujuſmodi eſt ad tempus deſcenſus per dimidium radium $\frac{1}{2}Ee$ eadem vi acceleratrice geniti ut $\frac{1}{2}p:1$. Tempus deſcenſus ob vim

4.A

$4A.\frac{Ee}{bE^2}$ eſt ad tempus deſcenſus per idem ſpatium ob naturalem vim gravitatis ut $1:\surd\left(\frac{4A.Ee}{bE^2}\right)$. Tempus deſcenſus per $\frac{1}{2}Ee$ ob ipſam vim gravitatis eſt ad tempus deſcenſus per $\frac{1}{2}F$ ut $\surd Ee:\surd F$, & tempus deſcenſus per dimidiam longitudinem penduli cycloidalis eſt ad tempus integræ oſcillationis ut $1:\frac{1}{2}p$. Compoſitis igitur rationibus tempus reditus ex e in E erit ad tempus unius ſecundi ut $1:\frac{4}{bE}.\surd(A.F)$: & cum fluidum utrimque æqualiter per ſpatia æqualia eE, cc^1 expandi debeat, & tempus reditus ex e in E æquale ſit tempori, quo pulſu per filamentum alterum priori bE æquale propagatur; ſpatium uno ſecundo temporis abſolutum erit $4.\surd(A.F)$.

Corollarium V.

Si cum altitudo mercurii in barometro eſt pollicum Londinenſium 29.5, ſeu Pariſienſium 27.7, ratio denſitatum aeris, & mercurii juxta Coteſium aſſumatur 1:11900, & ſit altitudo aeris homogenei pedum Pariſienſium 27469.2, longitudo autem penduli ſecundis ſingulis oſcillantis aſſumatur pedum 3.06; juxta priorem formulam ſpatium uno ſecundo ab aeris pulſibus abſolutum erit pedum Pariſienſium 911, & juxta poſteriorem formulam pedum 1160. Cum igitur experimentis anno 1738 a D.D. de Thury, la Caille, & Maraldo inſtitutis conſtet ſpatium uno ſecundo temporis a ſono abſolutum eſſe pedum 1038: & cum quæ elaſtico admiſcentur fixi aeris particulæ, transfuſo confeſtim motu, propagationem ſoni celeriorem debeant efficere, quam quæ in fluido undique elaſtico ſupputaretur; phænomenis priorem formulam propius accedere cenſendum erit. Patet etiam poſterioris formulæ hypotheſim non ſatis medio elaſtico aptari poſſe, & in eodem filamento expanſo utcumque, aut compreſſo partes alias denſiores aliis, rarioreſque eſſe oportere, nec motum omnem perinde ſe habere, ac ſi corpus aliquod e binis elaſtris Be, Ce in B, & C fixis inniteretur.

Scholion.

In Propoſ. XLVII., & IL. Lib. II. Newtonus bina theoremata propoſuerat: pulſibus per medium elaſticum propagatis particulas ſingulas accelerari, ac retardari pro lege oſcillantis penduli: & ſpatium a ſono

a ſono confectum eunte, ac redeunte pendulo, cujus longitudo ſit altitudo ipſa aeris homogenei, æquale eſſe peripheriæ circuli radio ejuſdem longitudinis deſcripti. Prioris theorematis demonſtrationem ſuſpectam habuerat Eulerus in theſibus Baſileæ editis anno 1727, & Johannes Bernoullius in diſſertatione, quæ anno 1736 Pariſienſe præmium obtinuit. Bernoullius etiam demonſtrationem aliam ſubſtituit, quæ tamen motui unius corporis binis elaſtris utrimque innixi potius quam vibrationibus aereæ cujuſvis fibræ aptari poteſt. Deinde anno 1740 in Commentariis ad Lib. II. Princip. Crameri animadverſiones prodierunt, quibus oſtenditur eamdem methodum demonſtrandi, qua in priori theoremate uſus fuerat Newtonus, ad falſam etiam abſurdamque concluſionem perducere. Ipſi vero Newtonianæ Philoſophiæ Interpretes, Clariſs. le Seur, & Jacquier, novam aliam utriuſque theorematis demonſtrationem, conſtructionemque exhibuerunt, ingenioſam undique, ac plane dignam ſummis Geometris, ac Mathematicis. Eodem fere tempore Euleri diſſertatio in lucem prodiit, quæ anno 1738 Pariſienſe præmium retulerat, & in qua ad definiendam velocitatem pulſuum nova alia formula Newtonianæ ſubſtituebatur. Cl. Alembertius, Cap. IV. de Fluidis, memoratum Newtoni locum fortaſſe totius operis difficiliorem, obſcurioremque eſſe dixit, atque in Bernoullii methodo non ſatis patere animadvertit quod pulſu per datum ſpatium propagato fibra alia excitari debeat priori æqualis: quod univerſim tamen ex ipſa medii elaſtici conſtitutione, atque indole deduci poſſet, ut jam attigimus.

Hæc omnia cum primum conſiderare cœpi, in Ephemeridibus Florentinis anni 1755 indicavi quod Newtonianæ demonſtrationis vitium videretur. Scilicet Newtonus cum aſſumpſiſſet particulas ſingulas medii elaſtici iiſdem legibus agitari, quas in Propoſ. LII. Lib. I. pendulorum oſcillantium eſſe oſtenderat, inveſtigavit poſtmodum quid ex hypotheſi aſſumpta deberet conſequi, invenitque acceleratrices vires particulæ cujuslibet diſtantiis a medio vibrationis loco proportionales eſſe oportere: quæ cum bina ſimul principia in unum recidant, cumque oſcillatio ad modum penduli haberi nequeat niſi acceleratrices vires ſint ſpatiis abſolvendis proportionales, ea demonſtrandi ratio principii, ut vocant, petitio eſt. In litteris etiam ad Illuſtrem Comitem Jordanum Riccatum datis, poſt editas Ephemerides, indicavi quibus aliis aſſumptis compreſſionis, expanſioniſque totius filamenti aerei hypotheſibus pro abſoluta pulſuum velocitate eadem Euleri formula exſurgeret, fere

ut

ut in postremis his corollariis dictum est. Curvam, quæ spatia a particulis aeris percursa juxta easdem hypotheses exprimeret, & quæ inde absurda consequerentur, ingeniosa analysi exposuit postmodum Riccatus in Dissert. IV. & V. Schediasmatis VIII. de chordis elasticis, atque in Dissertatione prima ex chordarum vibrantium analogia pro velocitate aerei cujusvis pulsus ipsam Newtoni formulam eruit. In Dissertatione autem secunda, & tertia Schediasmatis ejusdem Newtonianam demonstrationem a nota omni vindicare studuit: quia scilicet in aliis casibus spatiorum successive decrescentium, aut sectorum sphæricorum, assumpta similiter hypothesi quod particulæ omnes vibrentur ad modum penduli, vires acceleratrices non prodeant distantiæ a medio vibrationis loco proportionales, atque ita hypothesis se ipsam destruat. Quibus exemplis, atque inductionibus nescio an vis Newtonianæ demonstrationis restitui possit. In casu enim sectorum sphæricorum, spatiorumque decrescentium, nec particulæ aeris vibrantur ad modum penduli, nec vires acceleratrices sunt spatiis percurrendis proportionales: & ubi etiam assumatur vibrationis legem in particulis ipsis, & pendulis eamdem esse, quæ aliæ problemati admiscentur conditiones vetant ne eadem prodeat ratio virium, ac distantiarum. In casu vero uniformis, & rectilineæ propagationis soni vere & particulæ omnes vibrantur ad modum penduli, & vires acceleratrices sunt proportionales distantiis: at ad hæc duo demonstranda satis non est si primum assumatur loco hypotheseos, atque inde alterum colligatur.

In priori volumine Societatis Taurinensis, quod anno 1759 in lucem prodiit Clarisſ. la Grange, aliis adjectis in memorata Newtoni loca animadversionibus, generalem, ingeniosamque theoriam exhibuit propagationis soni, vibrationisque chordarum omnium elasticarum. Et quidem conclusiones omnes, quæ legem effusionis soni respiciunt, Newtonianis conformes reperit, & in subsequenti etiam volumine ostendit eadem theoremata emergere si ratio motuum in singulis aeris particulis alia, quem Newtonus assumpserat, curva exprimatur: ut generatim evenire solet quotiescumque & quod assumitur, & quod inde colligitur principium, non nisi unum & idem est. Cum igitur curva quavis seposita secundum illud Newtoni theorema ex generalibus motus legibus, & primum inverso ordine ex secundo brevissime deduci posse animadvertissem, placuit priores illas investigationes reassumere, atque huic alteri Cosmographiæ parti coronidis loco adjicere.

AP-

APPENDIX
AD THEORIAM LUNÆ.

Post evulgatam priorem partem Cosmographiæ eximium Clarifs. Euleri opus, anno 1772 editum, accepi, in quo ipse adjunctis ad calculi laborem sociis Alberto Filio, ac D.D. Krafft, & Lexell, Theoriam Lunæ ad novas æquationum series ingeniosissime deduxit. Scilicet locum Lunæ definire voluit ope trium coordinatarum, quarum binæ in plano Eclipticæ ad rectum angulum ducerentur, tertia esset eidem plano perpendicularis: ac deinde aliis adjiciendos reliquit calculos alios, quibus Lunæ locus e Terra visus ex loco immobili supputari, & cum tabulis Astronomicis comparari posset. Atque ut priorem Theoriæ analysim absolveret, a tribus æquationibus differentialibus pro coordinatis singulis exorsus, eadem indeterminatarum quantitatum methodo usus est, quam in Tractatu Petropoli edito, ab anno usque 1753, proposuerat, quamque Majerus etiam secutus fuerat in Theoria, quæ Londini prodiit anno 1767. Nimirum Cap. XI., & XII. assumpsit coordinatas ipsas serie aliqua posse exprimi, quæ non nisi angulorum quorumdam sinus, & cosinus involvat. Cumque in æquatione differentiali superesset terminus quidam constans $\delta - m^2 - 2m - \frac{1}{2}$, eumdem statuit $= 0$, ut fieret $\delta = (m+1)^2 + \frac{1}{2}$: & cum alius litteræ δ valor prodiisset jam ex præcedenti æquatione $\delta = \frac{v}{a^3}$, in qua a erat mediocris distantia Terræ a Sole; difficultatem omnem prævenit §. 74., adnotavitque pro quantitate a satis esse valorem tantum vero proximum, neque omnino valori maximo, & minimo intermedium assumere. Deinde §. 88. obiter tantum monuit in expressione cujuslibet ordinatæ nullos omnino terminos posse occurrere, qui circulares arcus involvant, & quibus continue auctis successu temporis Luna ab orbita proxime circulari, aut elliptica in aliam penitus orbitæ formam transeat.

At vero in assumpta quavis Theoriæ Lunaris serie, quocumque demum ordine, ac modo evolvenda sit, præstaret primum directe osten-

oſtendere æquationem differentialem Problematis, & analyſim omnem propoſitam illi incomodo minime obnoxiam eſſe ut ad circularium arcuum formulas deducat. Præſtaret etiam quantitatem motus apogæi ex prioribus æquationibus, nullis aliis hypotheſibus adjectis, directe eruere: quod qua ratione præſtiterit Eulerus minime apparet, Majerus autem videtur ex obſervationum conſenſu potius collegiſſe. Denique in Problemate difficillimo, quod diu jam ſummos omnes Mathematicos exercuit, præſtaret modo calculorum luxum temperare, brevitati, ac ſimplicitati conſulere, atque omnia ita exponere, ut lector per ſe ipſum calculorum ſeriem recognoſcere, ac facile poſſit perſequi. Quæ tria in Lib. IV. Par. I. ut ſimul præſtari poſſent æquatio differentialis ad eam formam deducta eſt ut non tertiam tantum, ſed etiam ſextam vectoris radii poteſtatem involveret. In ea enim æquationis totius diſpoſitione ſecundus terminus, quem vis mediocris a Sole in Lunam juxta vectorem radium exercita ſuppeditaverat, apogæi motum obſervationibus ſatis conformem exhibet, reliquis ejuſdem generis terminis proxime ſe deſtruentibus, qui aut partem aliquam obvolvebant vis perpendicularis radio, aut differentiam gravitatis, & vis centrifugæ: aliis vero æquationibus omnibus & veri, & medii motus e Terra viſi ſingillatim, ac perſpicue explicatis coefficiens alterius termini, qui ad expreſſionem circularium arcuum deduceret, tam parvus prodiit, ut non niſi ex minimis elementorum conſtantium variationibus in tam multiplici approximationum ſerie poſſit repeti.

Methodum omnem cum ſuperiore anno noſtrates aliquot, & exteri etiam Geometræ pervolviſſent, Cl. Bernareggius, qui Tunonii in Sabaudia Matheſeos Profeſſor eſt, litteris nuper ad me datis monuit alios perquam exiguos eſſe terminos, quorum ratione habita idem coefficiens ad minorem adhuc fractionem reduceretur. Ipſe calculis omnibus Theoriæ Lunaris ſummo ſtudio recognitis animadvertit in Probl. V. ex evolutione termini $-\frac{3}{4}\delta n^2 x^4 . \text{ſin.}(2 - 2n + m) . z$ educi etiam terminum $\frac{15}{8}\delta\rho^2 n^2 . \text{ſin.}(2c + 2n - m - 2) . z$, eoque integrato exſurgere $0.0000091\left(1 - \text{coſ.}(2c + 2n - m - 2) . z\right)$. Pariter ex termino $-\frac{15 n^2 x^3}{8a} . \text{ſin.}(3 - 3n) . z$ primo exſurgeret

$- \frac{225\, \varphi^2 n^2}{32 n}$. fin. $(3 - 3n - 2c).z$, ac deinde

$- 0.00000039\left(1 - \text{cof.}(3 - 3n - 2c).z\right)$. Quare cum coefficientes alii, qui fimili modo fupputari poffent, ad decimales inferiorum ordinum pertineat, in corollario problematis ejufdem quantitati conftanti $- 0.0051615$ adjungenda effet $+ 0.0000087$, ac fieret $F = - 0.0051528$, & $\frac{2F}{1 + \frac{1}{2}\varphi^2} = - 0.01029014$.

His pofitis cum in æquatione differentiali Probl. III., divifione facta per $1 - 3n^2\varphi^2$, fuperfit terminus conftans $\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n^2\varphi^2$, fubftitutis rurfus fpeciebus pro æquatione reducta in Probl. VI. emerget

$$\frac{dds}{dz^2} + (1 - 3n^2).s = - 0.00746732 - 0.01029014\left(3 - \frac{1}{2}\varphi^2\right).s - 2s^2$$
$$+ \left(c^2 - 1 - 3n^2 - (4 - c^2 - 15n^2).s\right)\frac{\varphi.\ \text{cof.}\ cz}{1 + \frac{3}{2}\varphi^2}$$
$$- 0.03087042.\varphi.\text{cof.}\ cz - \frac{1}{2}\varphi^2 s.\text{cof.}\ 2cz\ \&c.$$

Hujus æquationis integratione pro differentia vectoris radii primo exfurgeret quantitas conftans $- \frac{0.00746732}{1 - 3n^2}$. Jam vero cum fumma quantitatum omnium conftantium, feu diftantia mediocris Lunæ a Terra in præcedentibus omnibus refolutionibus pro unitate jam fumpta fit, nec nifi ea differentiæ ejufdem portio T requiratur, quæ ob perturbatrices vires inducitur, quæque folis exprimitur variabilibus quantitatibus; ad quantitatem conftantem inde eliminandam fiat

$$s = T - \frac{0.00746732}{0.9832141} = T - 0.0075948$$

$$- 0.030824115.s = 0.0002341 - 0.030824115.T$$

$$- 2s^2 = - 0.0001152 + 0.0303792 - 2T^2.$$

Hifce terminis fubftitutis in differentiali æquatione fupererit tantum conftans 0.0001189, eaque proxime deftruetur aliis quantitatibus, quæ in expreffione termini $-2T^2$ debent occurrere. Nam fi fiat $T = 0.0107.\text{cof.}(2 - 2n - c).z - 0.0066.\text{cof.}(2 - 2n).z$, evoluto primum termino $-2T^2$ exfurget quantitas conftans -0.000158.

Collectis itaque aliis terminis, atque his rurfus minutiis, & inde ortis correctionibus neglectis, fiet ultimo reducta æquatio

ddT

$$\frac{ddT}{dz^2} + 0.983659.\,T = -0.03087042.\,\varphi.\text{cof.}cz - \tfrac{1}{2}\varphi^2 T.\text{cof.}2cz - 2T^2$$
$$+ \left(c^2 - 1 - 3n^2 - (4 - c^2 - 15n^2)(T - 0.0075948)\right)\frac{\varphi.\text{cof.}cz}{1+\frac{5}{2}\varphi^2} \,\&c.:$$

ubi cum ſecundi termini coefficiens ſit major partibus 0.0004876 ut apogæi motum obſervationibus congruentem exhibeat, conquiſivi undique ſi quo alio exiguo termino ſupputato coefficiens ad quantitatem 0.9831714 proxime reduci poſſet. Deprehendi vero quod ſi in expreſſione quantitatis x^3 ex Probl. III. adjiceretur terminus $3t^2$, in expreſſione quantitatis $\frac{2x^3\int u x^3 dz}{1+\frac{1}{2}\varphi^2}$, in Pr. VI., occurreret inſuper terminus

$$\frac{6F.\,t^2}{1+\frac{1}{2}\varphi^2} = -0.01029014. \times -0.0075948 \times 6T = 0.0004689.T.$$

Utrimque igitur ſubductis quantitatibus æqualibus, in æquatione eadem differentiali ſupererit ſecundus terminus 0.9831901.T, exceſſuſque omnis erit dumtaxat 0.0000187, neque amplius apogæi lunaris motus ex generali æquatione directe erutus ab aſtronomicis obſervationibus ſenſibiliter diſſentiet.

Quod ſi ex ipſis obſervationibus aſſumatur $c^2 = 0.9831714$, ac fiant de more ſubſtitutiones aliæ, prodibit alter æquationis differentialis terminus

$$\left(c^2 - 1 - 3n^2 + 0.0075948\,(4 - c^2 - 15n^2)\right)\frac{.\varphi.\ \text{cof.}\ cz}{1+\frac{5}{2}\varphi^2} =$$

0.00120696.. cof. cz, copulandoque terminum $-0.03087042.\varphi.\,\text{cof.}cz = -0.00168861.\,\text{cof.}cz$, in æquatione eadem habebitur dumtaxat terminus $-0.00048165.\,\text{cof.}\,cz$, ac denique adjungendo alios nominis ejuſdem terminos, qui in Scholio Cap. IV. ex evolutione quantitatum $2x^3\int u x^3 dz$, $u x^3$, $-2T^2$ &c. educebantur, ſupererit 0.00000267. cof. cz. Si in expreſſione quantitatis x^3 habeatur ratio termini $6\varphi t.\,\text{cof.}cz$, loco producti $\frac{2F.\,x^3}{1+\frac{5}{2}\varphi^2}$ adjiciendus inſuper eſſet terminus 0.00002565. cof. cz: atque is proxime deſtrueretur termino alio, qui ex indicato Scholio, atque ex termino $\frac{27}{2}n^2 T.\,\text{cof.}(2-2n).z$ erueretur in locum differentiæ T ſubſtituendo quantitatem $-0.0005895.\,\text{cof.}(2-2n+c).z$. Simili modo cum in ejuſdem Scholii correctionibus ſubſtituiſſem terminos alios, qui differentiam radii vectoris exprimunt, poſitivaſque omnes, ac negativas fractiones ſimul collegiſſem, nihil emergere inveni, cujus ratio habenda eſſet. Ubi vero ad hujuſmodi minutias calculus deductus eſt, ſatis jam analyſtæ

lyſtæ eſſe debet. Qui methodum Libri ejuſdem quarti perſpectam habeat, facile poterit & alios terminos inferiorum ordinum quærere, & variatis aliquantulum conſtantibus elementis approximationum ſeriem reaſſumere, & calculi diligentiam exercere quantum voluerit. Qui in poſterum Theoriæ Lunari operam dabunt Lectores monendi ſunt, quod jam aliis moram injecit, in toto Lib. IV., atque in Lem. X. Lib. I. non alterutrum tantum, ſed binos ſimul terminos ſignis $\pm$ deſignatos eſſe accipiendos, ut ex contextu ipſo colligitur.

F I N I S.

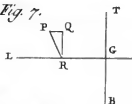
In priori Coſmographiæ parte.

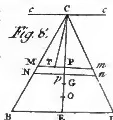
		ERRATA alia	CORRIGE.
pag. 3.	lin. 13.	$2S$	S
32.	ult.	$(1-X)$	$(1-X^2)$
40.	26.	radius	arcus
52.	2.	$HA\pm$	$AH\mp$
58.	27.	$1:\sqrt{2}$	$\sqrt{2}:1$
59.	2.	$\frac{4\sqrt{2}}{3p}$	$\frac{4}{3p\sqrt{2}}$
63.	ult.	$\frac{\frac{1}{2}}{\ }$	$\frac{\frac{1}{4}}{\ }$
64.	15.	$1-{}^2$	$1-\varphi^2$
65.	9.	$\frac{r^{\frac{1}{2}}}{B}$	$\frac{r^{\frac{1}{2}}}{B^2}$
	12.	$\frac{\omega}{r}$	ω
66.	24.	$(1-\varphi^2)^{\frac{2}{3}}$	$(1-\varphi^2)^{\frac{3}{2}}$
67.	15.	FQC	AFQ
68.	25.	φ. cof. cZ	φ. cof. $2cZ$
75.	21.	Qp	QP
88.	ult.	$3AZ$	$9AZ$
104.	7.	ATB	2ATB
108.	1.	100	110
125.	11.	a^3	a^4
127.	7.	major	minor
146.	34.	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{4}$
147.	1.	$\frac{27}{4}$	$\frac{27}{8}$
189.	3.	$5\varphi^2 r$	$15\varphi^2 r$
	5.	$3+\frac{15}{2}\varphi^2$	$3+\frac{17}{2}\varphi^2$
190.	1.&2.	$2n^2\varphi^2$	$-3n^2\varphi^2$
pag. 190.	lin. 6.	$-3n^2\varphi^2$	$+\frac{3}{2}n^2\varphi^2$
196.	12.	$2-n$	$2-2n$
	penul.	$-3\delta n^2$	$+3\delta n^2$
198.	ult.	$-\frac{1}{2}n^2\varphi\delta$	$+3\frac{1}{2}n^2\varphi\delta$
213.	12.	$1-n+m-1$	$1-n+m-c$

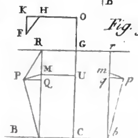
In hac altera parte.

		ERRATA	CORRIGE.
pag. 40.	lin. 34.	projectionis:	projectionis
49.	16.	$\frac{\varpi}{\ }$	$\frac{\varpi}{\omega}$
54.	31.	$\frac{f^2+g^2}{A^2B^2}$	$\frac{f^2}{A^2}+\frac{g^2}{B^2}$
56.	3.	6^4	b^4
64.	36.	impreſſi	impreſſis
66.	7.	binis	bini
68.	39.	quas	quæ
69.	29.	$\frac{\pi^2}{2}$	$\frac{\pi^2}{\delta^2}$
93.	3.	C^2-2CB	C^2+2CB
94.	27.	proponantur	proponatur
139.	31.	quam qui	quam quæ
142.	18.	Enyclodico	Encyclopedico
144.	20.	coluris	colurus
191.	1.	De altitudo	De altitudine
194.	21.	Carhtagine	Carthagine
170.	1.	Probl.	Probl. I.
208.	13.	tradentem	tendentem
230.	30.	quæ	qui
263.	3.	Coroll. IV. Theor. III.	Coroll. Probl. VI.

Si quæ alia fortaſſe exciderunt menda ex ipſo contextu Lector benignus corriget.


Fig. 7.
P
Q
T
L
R
G
r
M
C
q
p
B
c


c
C
c
Fig. 8.
M
T
P
m
N
n
p
G
O
B
E
I


K
H
O
F
Fig. 9.
R
G
r
M
P
U
Q
m
q
p
B
C
b

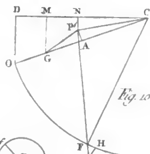
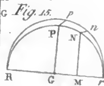
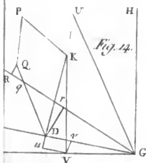

D
M
N
C
P
A
O
G
Fig. 10.
F
H
K

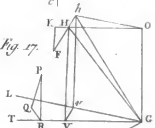

Fig. 12.
l

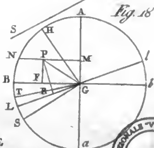

b
B

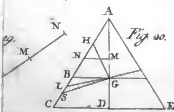

f
a
D
L
A
G
F
Fig. 13.
C
c


Fig. 15.
p
n
P
N
R
G
M
r

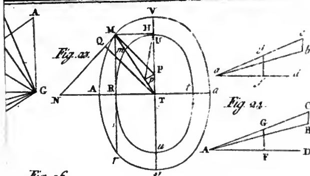

P
U
H
Fig. 14.
Q
K
R
q
r
D
u
V
G

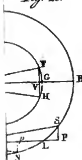

h
K
H
O
Fig. 17.
F
P
L
Q
T
R
V
G

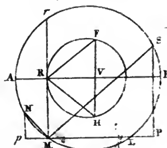

Fig. 18
A
S
H
N
P
M
l
B
F
G
b
T
R
L
S
a

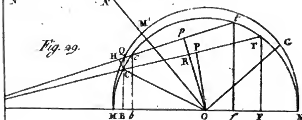

N
M
A
Fig. 20.
H
N
M
B
L
G
S
C
D
E

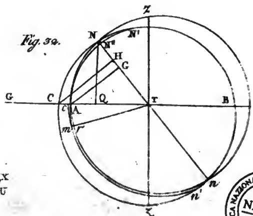

NAP

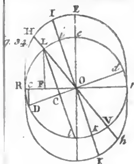

Fig. 25.
Fig. 24.

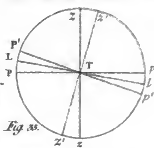

Fig. 26.

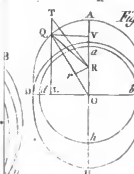

Fig. 27.

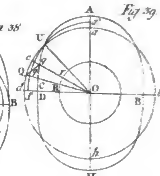

Fig. 29.

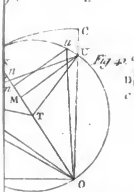

Fig. 32.

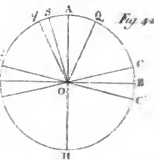

Fig. 34.

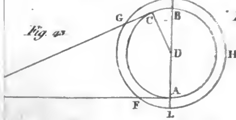

Fig. 35.


Fig. 38


Fig. 39.


Fig. 40.


Fig. 42


Fig. 43.
Fig. 44

